Derechos Reservados © 2024 Mundo Social
Mundo Social **01**, (2025)
Disponible en https://mundo-social.com/

Solución matemática Para Economia I

Ciclo 25-1, dictado por Factor Risco Guillen

Vilcapoma Ramos Luis Heber [1]
[1] *Undergraduate Economist, Universidad Nacional Mayor de San Marcos*
ever07.vilcapomar@gmail.com
Disponible en: https://mundo-social.com/

En este documento se presenta el desarrollo del primer examen parcial del curso de matemática para economia I - 2025 en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM).

Ejercicio 1

Lulú es propietaria de un edificio de apartamentos que tiene 80 departamentos. Ella puede rentar todos los departamentos si cobra una renta de \$220 mensuales.

A una renta mayor, algunos departamentos permanecerán vacíos; en promedio, por cada incremento de \$5 en la renta, 1 departamento quedará vacante sin posibilidad de rentarlo. Encuentre la renta que debe cobrar por cada departamento para obtener un ingreso de \$1400.

Solución

- Sea x el número de incrementos de \$5 en la renta.
- Entonces, la renta por departamento será: $R = 220 + 5x$
- La cantidad de departamentos rentados será: $Q = 80 - x$
- El ingreso total se define como: $I = R \cdot Q = (220 + 5x)(80 - x)$
- Se desea que el ingreso total sea de \$1400:

$$\begin{gathered}(220+5x)(80-x)=1400\\ (220+5x)(80-x)=17600+180x-5x^2\\ 1400=17600+180x-5x^2\\ -5x^2+180x+16200=0\Rightarrow 5x^2-180x-16200=0\end{gathered}$$

Usamos la fórmula general:

$$x=\frac{-(-180)\pm\sqrt{(-180)^2-4(5)(-16200)}}{2(5)}=\frac{180\pm\sqrt{32400+324000}}{10}=\frac{180\pm\sqrt{356400}}{10}$$

$$x\approx\frac{180\pm 596.99}{10}\Rightarrow x_1\approx\frac{180+596.99}{10}\approx 77.7,\quad x_2\approx\frac{180-596.99}{10}\approx -41.7$$

$$R=220+5x\Rightarrow R\approx 220+5(77.7)=608.5$$

Respuesta: Cobrará una renta de aproximadamente \$608.50 por departamento.

Ejercicio 2

Resolver la siguiente desigualdad:

$$\frac{x^2-3x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}<0$$

Solución

- Factorizamos el primer numerador:

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

Entonces, la desigualdad se convierte en:

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}$$

- Simplificamos el primer término. Para $x \neq 2$:

$$x - 1 - \frac{x-2}{x+2} < 0$$

- Reducimos a un solo término con común denominador:

$$\frac{(x-1)(x+2) - (x-2)}{x+2} < 0$$

- Expandimos el numerador:

$$(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$

$$x^2 + x - 2 - (x-2) = x^2$$

  Entonces la expresión queda:

$$\frac{x^2}{x+2} < 0$$

- El numerador x^2 es siempre positivo o cero.
- El denominador $(x+2)$ cambia de signo en $x = -2$.

La fracción será negativa cuando:

$$x^2 > 0 \quad \text{y} \quad x + 2 < 0 \Rightarrow x \neq 0 \quad \text{y} \quad x < -2$$

Respuesta: $x \in (-\infty, -2)$

Ejercicio 3

La parábola $y = -x^2 + bx + c$ interseca con el eje x en los puntos $(u, 0)$ y $(v, 0)$. Se sabe que ella interseca una única vez cada una de las rectas dadas por las ecuaciones $y = 2x+1$ e $y = \dfrac{1+x}{2}$. Hallar el valor de $u + v$.

Solución

Dada la parábola:

$$y = -x^2 + bx + c$$

- Igualamos la parábola con la recta $y = 2x + 1$:

$$-x^2 + bx + c = 2x + 1 \Rightarrow -x^2 + (b-2)x + (c-1) = 0$$

  Para que haya una única intersección, esta ecuación cuadrática debe tener una sola raíz real:

$$\text{Discriminante} = (b-2)^2 - 4(-1)(c-1) = 0 \Rightarrow (b-2)^2 + 4(c-1) = 0 \qquad (1)$$

- Igualamos la parábola con la recta $y = \dfrac{1+x}{2}$:

$$-x^2 + bx + c = \frac{1+x}{2} \Rightarrow -2x^2 + 2bx + 2c = 1 + x$$

$$\Rightarrow -2x^2 + (2b-1)x + (2c-1) = 0$$

También debe tener una única raíz real:

$$\text{Discriminante} = (2b-1)^2 - 4(-2)(2c-1) = 0 \Rightarrow (2b-1)^2 + 8(2c-1) = 0 \quad (2)$$

- Resolver el sistema de ecuaciones (1) y (2):

De (1):

$$(b-2)^2 + 4(c-1) = 0 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 + 4c - 4 = 0 \Rightarrow b^2 - 4b + 4c = 0 \quad (3)$$

De (2):

$$(2b-1)^2 + 8(2c-1) = 0 \Rightarrow 4b^2 - 4b + 1 + 16c - 8 = 0 \Rightarrow 4b^2 - 4b + 16c - 7 = 0 \quad (4)$$

- Multiplicamos la ecuación (3) por 4:

$$4b^2 - 16b + 16c = 0 \quad (5)$$

Restamos (5) - (4):

$$(4b^2 - 16b + 16c) - (4b^2 - 4b + 16c - 7) = 0 \Rightarrow -12b + 7 = 0 \Rightarrow b = \frac{7}{12}$$

Sustituimos en (3):

$$\left(\frac{7}{12}\right)^2 - 4 \cdot \frac{7}{12} + 4c = 0 \Rightarrow \frac{49}{144} - \frac{28}{12} + 4c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{49}{144} - \frac{336}{144} + 4c = 0 \Rightarrow -\frac{287}{144} + 4c = 0 \Rightarrow c = \frac{287}{576}$$

- Hallar $u + v$:

Como $y = -x^2 + bx + c$, por la fórmula de suma de raíces de una cuadrática $ax^2 + bx + c$, se tiene:

$$u + v = -\frac{b}{a} = -\frac{b}{-1} = b = \frac{7}{12}$$

Respuesta: $u + v = \dfrac{7}{12}$

Ejercicio 4

Las funciones de demanda u oferta de un producto están dadas por:

$$Q_d = 60 - 3P, \quad Q_s = 2P - 10$$

- **Graficar y calcular la elasticidad-precio de la demanda en el equilibrio inicial.**
- **Si el gobierno quiere maximizar la recaudación, ¿qué monto de impuestos por unidad debería aplicar?**

Solución

a) Punto de equilibrio y elasticidad-precio de la demanda

Paso 1: Igualamos oferta y demanda para hallar el equilibrio:

$$60 - 3P = 2P - 10 \Rightarrow 70 = 5P \Rightarrow P^* = 14$$

$$Q^* = 60 - 3(14) = 18$$

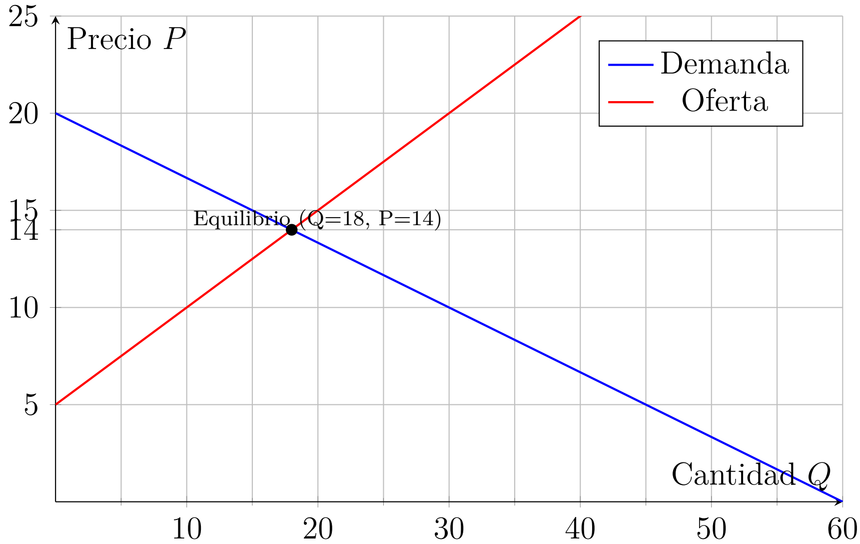
Entonces, el equilibrio es: $P^* = 14$, $Q^* = 18$.

Paso 2: Elasticidad-precio de la demanda en el equilibrio:

$$E_d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = (-3) \cdot \frac{14}{18} = -\frac{42}{18} = -2.3$$

Respuesta: $E_d = -2.3$

Gráfico de la oferta y la demanda



b) Impuesto que maximiza la recaudación

Oferta con impuesto t: $Q_s = 2(P - t) - 10 = 2P - 2t - 10$

Igualamos con la demanda:

$$60 - 3P = 2P - 2t - 10 \Rightarrow 70 + 2t = 5P \Rightarrow P(t) = \frac{70 + 2t}{5}$$

Cantidad demandada con impuesto:

$$Q = 60 - 3P = 60 - 3\left(\frac{70 + 2t}{5}\right) = \frac{300 - 210 - 6t}{5} = \frac{90 - 6t}{5}$$

Recaudación fiscal:

$$R(t) = t \cdot Q = t \cdot \left(\frac{90 - 6t}{5}\right) = \frac{90t - 6t^2}{5}$$

Maximizamos la recaudación:

$$R'(t) = \frac{1}{5}(90 - 12t) = 0 \Rightarrow t = \frac{90}{12} = 7.5$$

Respuesta: El impuesto que maximiza la recaudación es $t = 7.5$.

Derechos Reservados © 2024 Mundo Social
Mundo Social **01**, (2025)
Disponible en https://mundo-social.com/

Solución matemática Para Economia I

Ciclo 25-1, dictado por Factor Risco Guillen

Vilcapoma Ramos Luis Heber [1]
[1] *Undergraduate Economist, Universidad Nacional Mayor de San Marcos*
ever07.vilcapomar@gmail.com
Disponible en: https://mundo-social.com/

En este documento se presenta el desarrollo de la primera practica dirigida del curso de matemática para economia I - 2025 en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM).

Ejercicio 1

María López, dueña de una tienda de celulares, estima que la relación entre el precio p (en dólares) y la cantidad vendida x (en unidades mensuales) para un modelo popular está dada por:

$$p = 800 - 1{,}5x$$

¿Cuántos celulares debe vender María para obtener ingresos mensuales superiores a \$30,000, si el precio no puede ser inferior a \$200 por unidad?

Dado $p = 800 - 1.5x$, el ingreso es:

$$I(x) = x(800 - 1.5x) = 800x - 1.5x^2$$

Queremos $I(x) > 30000$ y $p \geq 200 \Rightarrow x \leq 400$
Resolviendo:

$$800x - 1.5x^2 > 30000 \Rightarrow x \in (64.8,\ 468.5)$$

Con la restricción del precio:

$$x \in (64.8,\ 400] \Rightarrow \boxed{x = 65}$$

María debe vender al menos **65 celulares**.

Ejercicio 2

Queremos hallar el mayor valor de p tal que:

$$\left|x^2 - 6x + 10\right| \geq p(x^2 + 5), \quad \forall x \in [0, 4]$$

Paso 1:
Observamos que el numerador es:

$$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1$$

Como $(x - 3)^2 \geq 0$, entonces:

$$x^2 - 6x + 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left|x^2 - 6x + 10\right| = x^2 - 6x + 10$$

Paso 2:

$$\frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 + 5} \geq p$$

Paso 3:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 + 5}$$

$$f(0) = \frac{10}{5} = 2$$
$$f(2) = \frac{4 - 12 + 10}{4 + 5} = \frac{2}{9}$$
$$f(3) = \frac{9 - 18 + 10}{9 + 5} = \frac{1}{14}$$
$$f(4) = \frac{16 - 24 + 10}{16 + 5} = \frac{2}{21}$$

Respuesta: El valor mínimo es $\frac{1}{14}$

Ejercicio 3

Sean los conjuntos:

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}, \quad H = \{y \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq y < 2\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

a) Hallar $H \times G$

$$|H| = 5, \quad |G| = 3 \Rightarrow |H \times G| = 5 \cdot 3 = 15$$

Respuesta: El conjunto $H \times G$ tiene **15 elementos**.

b) Función biyectiva de un subconjunto de G en H

$$A = \{-1, 0, 1\} \subseteq G, \quad B = \{-1, 0, 1\} \subseteq H$$

Definimos la función:

$$f(x) = x$$

- Es inyectiva: si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Es sobreyectiva: cada elemento de B es imagen de algún elemento de A

Respuesta: Una función biyectiva $f(x) = x$.

Ejercicio 4

Dados 3 conjuntos P, Q, R con t, $5t$ y $(t + 1)$ elementos respectivamente, donde P y Q tienen $\frac{t}{2}$ elementos comunes, P y R tienen $\frac{t}{5}$, y Q y R tienen 1. Si hay tres elementos comunes a los tres conjuntos, hallar el número de elementos del conjunto:

$$(P \cup Q \cup R) - [(P \cap Q) \cup (P \cap R) \cup (Q \cap R)]$$

Sean tres conjuntos P, Q, R con:

$$|P| = t, \quad |Q| = 5t, \quad |R| = t + 1$$

$$|P \cap Q| = \frac{t}{2}, \quad |P \cap R| = \frac{t}{5}, \quad |Q \cap R| = 1, \quad |P \cap Q \cap R| = 3$$

Se desea calcular:

$$|(P \cup Q \cup R) - [(P \cap Q) \cup (P \cap R) \cup (Q \cap R)]|$$

$$|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |Q \cap R| + |P \cap Q \cap R|$$
$$= t + 5t + (t + 1) - \frac{t}{2} - \frac{t}{5} - 1 + 3 = \frac{63t}{10} + 3$$

$$|(P \cap Q) \cup (P \cap R) \cup (Q \cap R)| = \frac{t}{2} + \frac{t}{5} + 1 - 3 = \frac{7t}{10} - 2$$

Resultado final:

$$|(P \cup Q \cup R) - [(P \cap Q) \cup (P \cap R) \cup (Q \cap R)]| = \frac{28t}{5} + 5$$

Derechos Reservados © 2024 Mundo Social
Mundo Social **01**, (2025)
Disponible en https://mundo-social.com/

Solución matemática Para Economia I

Ciclo 25-1, dictado por Wilfredo Bacilio Alarcón

Vilcapoma Ramos Luis Heber [1]
[1] *Undergraduate Economist, Universidad Nacional Mayor de San Marcos*
ever07.vilcapomar@gmail.com
Disponible en: https://mundo-social.com/

En este documento se presenta el desarrollo del primer examen parcial del curso de matemática para economia I - 2025 en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM).

Bloque I: Preguntas de Teoría

Analice la veracidad (V) o falsedad (F) de los siguientes enunciados y/o responda brevemente cada una de las preguntas. Inicie primero respondiendo directamente la pregunta y luego proceda a justificar su respuesta. No olvide que debe justificar su respuesta utilizando la teoría desarrollada en clase o según sus propias investigaciones.

1. Dos alumnos de matemática están discutiendo respecto a la cantidad de elementos que tiene el conjunto de perfiles de estrategias puras de un juego de dos jugadores con 3 estrategias por cada uno de los jugadores. Se sabe que el juego tiene un conjunto finito de estrategias para cada jugador dados por $S_1 = \{A, B, C\}$ y $S_2 = \{a, b, c\}$. El alumno A dice que existe un total de 9 elementos totales, mientras que el alumno B dice que en total existen 2^3 elemento del conjunto de estrategias. Finalmente, el alumno C agrega que ambos están equivocados pues en total son $2^{3\times3}$ elementos ya que dicho conjunto se refiere al conjunto de potencia de los conjuntos finitos de estrategias puras de cada jugador.

   ¿Cuál de los tres alumnos dice la verdad?

   Solución:

   - El conjunto de perfiles de estrategias puras en un juego de dos jugadores se construye combinando todas las estrategias posibles de cada jugador $S_1 \times S_2$.
   - Dado que $S_1 = \{A, B, C\}$ y $S_2 = \{a, b, c\}$, cada jugador tiene 3 estrategias disponibles.
   - Por lo tanto, el número total de perfiles de estrategias puras es $3 \times 3 = 9$.

   Analizamos:

   - Alumno A: dice que hay 9 elementos $\Rightarrow$ **Correcto**.
   - Alumno B: dice que hay $2^3 = 8$ elementos $\Rightarrow$ **Incorrecto**.
   - Alumno C: dice que hay $2^{3\times3} = 512$ elementos $\Rightarrow$ **Incorrecto**.

   Respuesta: Solo el **alumno A** está en lo correcto.

2. Un buen día, mi amiga de Conta estaba reflexionando sobre su última reunión con sus amigas.

   - La primera amiga tenía un único libro (LibroA) de Contabilidad General por lo que ese único libro es el que usó para estudiar.
   - Por otro lado, una segunda amiga (que tenía mayor poder adquisitivo) tenía un total de 3 libros a usar para estudiar. Esta segunda amiga había ordenado dichos libros en orden de importancia para rendir un muy buen examen, dicho orden es: LibroA $\succeq$ LibroB y LibroB $\succeq$ LibroC.
   - Finalmente, su tercera amiga tenía a disposición una biblioteca entera con más de 100 títulos de libros que puede utilizar, sin embargo, no leyó ninguno de ellos al no saber por cuál iniciar.

Entonces, con dicha información. Indique qué amiga de mi amiga de Conta presenta preferencias racionales y cuál no.

Solución:

- **Reflexividad:** para toda alternativa x, se cumple que $x \succeq x$, es decir, toda alternativa es al menos tan buena como sí misma.
- **Completitud:** el agente es capaz de comparar cualquier par de alternativas x y y, es decir, siempre puede decir si $x \succeq y$, $y \succeq x$ o ambos (indiferencia).
- **Transitividad:** si $x \succeq y$ y $y \succeq z$, entonces necesariamente $x \succeq z$.

Análisis por amiga:

- **Primera amiga:** Solo tiene un libro (LibroA), no podemos considerar que sus preferencias son o no racionales.
- **Segunda amiga:** Tiene tres libros y establece un orden: LibroA $\succeq$ LibroB y LibroB $\succeq$ LibroC. Entonces LibroA $\succeq$ LibroC. Esto sugiere que su preferencia es **completa y transitiva**. $\Rightarrow$ **Preferencias racionales**.
- **Tercera amiga:** Tiene más de 100 libros disponibles, pero no puede decidir por cuál empezar. Esto implica que **no puede comparar** las alternativas, es decir, no tiene preferencias completas. $\Rightarrow$ **No tiene preferencias racionales**.

Respuesta: La **segunda amiga** de la amiga de Conta presenta **preferencias racionales**. La **tercera amiga** no.

3. Un alumno (de nombre Paúl) de Mateco I se encuentra repasando sus apuntes y nota que la función de demanda $q(p) = -p^2 + 6p$ no puede usarla para plantear el problema de maximización de beneficios de una empresa monopólica que tome como variable de control a la cantidad. Su prima Estefanía, que también estudia Economía, observa la función y le dice que no existe una función $p(q)$. Sin embargo, Paúl no le cree y afirma que sí existe.

   ¿Cuál de los alumnos tiene razón?

   Solución:

$$q = -p^2 + 6p$$
$$-p^2 + 6p - q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - 6p + q = 0$$
$$p = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4q}}{2}$$

   La solución involucra dos posibles valores de p para un mismo q. Esto significa que una misma cantidad q puede estar asociada a dos precios distintos p, lo que impide obtener una función inversa sin restringir el dominio.

   Respuesta: Estefanía tiene razón. No existe una función $p(q)$ bien definida para toda la función de demanda.

4. Un grupo de alumnos del curso de Matemática para Economía I está tratando de hallar el punto en el cual el rendimiento promedio del trabajador se equipare al rendimiento del último trabajador contratado. El Delegado 1 menciona que deben plantear el problema de maximización de la función de Producto Marginal del trabajador, mientras que el Delegado 2 le dice que está equivocado, ya que lo que deberían hacer es hacer ese planteamiento pero para el producto medio del trabajador. Finalmente, un alumno random (que nunca suele participar) dice que lo que deben hacer es hallar el punto de inflexión de la función de producción, ya que de esa forma está planteando el problema de tal forma que está considerando la función original que da origen a las otras dos funciones antes mencionadas.

   ¿Cuál de los 3 alumnos está en lo correcto y cuál no?

   Solución.

   - El **producto medio** se define como $PMed = \frac{Q}{L}$.
   - El **producto marginal** se define como $PMg = \frac{dQ}{dL}$.

   Este punto de igualdad ocurre en el **máximo del producto medio**, es decir, cuando:

$$PMed = PMg$$

   Análizamos:

   - **Delegado 1:** Plantea maximizar el producto marginal del trabajador. Esto es incorrecto, el producto marginal puede estar en su máximo en un punto distinto al de su cruce con el producto medio. Maximizar PMg no garantiza que se iguale con PMed.
   - **Delegado 2:** Plantea maximizar el producto medio del trabajador. Esto es **correcto**, pues el producto medio se iguala al marginal exactamente en su punto máximo.

     Demostracion

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{f(L)}{L}\right) = \frac{L \cdot f'(L) - f(L)}{L^2}$$

     Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{L \cdot f'(L) - f(L)}{L^2} = 0 \Rightarrow L \cdot f'(L) - f(L) = 0 \Rightarrow f'(L) = \frac{f(L)}{L}$$

$$\Rightarrow PMg = PMed$$

   - **Alumno random:** Esta incorrecto, ya que el punto de inflexión corresponde al máximo del producto marginal, no a su igualdad con el producto medio.

   Respuesta: El **Delegado 2** es quien tiene la razón..

5. Bajo un modelo de monopolio (competencia imperfecta), a medida que la elasticidad precio de la demanda tiende a infinito (es decir, los consumidores se hacen extremadamente sensibles a cambios en el precio), el precio de mercado tiende al costo marginal.

Solución:

Paso 1: Maximization de beneficio del monopolista

$$\pi(q) = p(q) \cdot q - C(q)$$

donde:

- $\pi(q)$ es el beneficio total,
- $p(q) \cdot q$ es el ingreso total (el precio depende de la cantidad),
- $C(q)$ es el costo total.

Derivamos la función de beneficio con respecto a q:

$$\frac{d\pi}{dq} = p'(q) \cdot q + p(q) - C'(q)$$

La condición de primer orden para maximizar el beneficio es:

$$p'(q) \cdot q + p(q) = Cmg(q)$$

Paso 2: Relación con la elasticidad-precio de la demanda

Elasticidad-precio:

$$\varepsilon = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{dp}{dq} \cdot \frac{q}{p}$$

Derivada del precio respecto a la cantidad:

$$p'(q) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{q}$$

Sustituyendo en la condición de maximización:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{q}\right) \cdot q + p = Cmg \Rightarrow \frac{p}{\varepsilon} + p = Cmg$$

Factorizamos:

$$p\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = Cmg$$

Despejamos la expresión:

$$\frac{p - Cmg}{p} = -\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{|\varepsilon|}$$

Paso 3: Límite cuando $|\varepsilon| \to \infty$

Si la elasticidad-precio de la demanda tiende a infinito entonces:

$$\frac{1}{|\varepsilon|} \to 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{p - Cmg}{p} \to 0 \quad \Rightarrow \quad p \to Cmg$$

Respuesta: Cuando la **elasticidad-precio de la demanda tiende a infinito** el precio tiende a igualarse al **costo marginal**.

Bloque II: Preguntas de Aplicación Práctica

pregunta 6

Sea $q(L)$ una función de producción por tramos definida por:

$$q(L) = \begin{cases} 2L - 0.2L^2 & \text{si } 0 \leq L \leq 5 \\ -0.1L^2 + 2L - 2.5 & \text{si } 5 < L \leq 10 \\ -0.5L + 12.5 & \text{si } 10 < L \leq 12 \end{cases}$$

En base a los conocimientos y herramientas de análisis adquiridos en clase, se pide que responda las siguientes preguntas:

1. **Evalúe la continuidad de la función $q(L)$ en cada punto que crea conveniente.**

   Solución:

   Los puntos donde la definición de la función cambia son: $L = 5$ y $L = 10$. Evaluamos la continuidad en esos puntos:

   - En $L = 5$:

     $$\begin{aligned} \lim_{L \to 5^-} q(L) &= 2(5) - 0.2(5)^2 = 10 - 5 = 5 \\ \lim_{L \to 5^+} q(L) &= -0.1(25) + 2(5) - 2.5 = -2.5 + 10 - 2.5 = 5 \\ q(5) &= 5 \end{aligned}$$

     Por tanto, la función es continua en $L = 5$.

   - En $L = 10$:

     $$\begin{aligned} \lim_{L \to 10^-} q(L) &= -0.1(100) + 2(10) - 2.5 = -10 + 20 - 2.5 = 7.5 \\ \lim_{L \to 10^+} q(L) &= -0.5(10) + 12.5 = -5 + 12.5 = 7.5 \\ q(10) &= 7.5 \end{aligned}$$

     Por tanto, la función también es continua en $L = 10$.

   Respuesta: La función $q(L)$ es continua en todo su dominio $[0, 12]$.

2. **¿Podemos afirmar que dicha función presenta rendimientos marginales decrecientes?**

   Solución:

   - Para $0 \leq L \leq 5$:

     $$q'(L) = \frac{d}{dL}(2L - 0.2L^2) = 2 - 0.4L$$

     Presenta rendimientos marginales decrecientes.

- Para $5 < L \leq 10$:

$$q'(L) = \frac{d}{dL}(-0.1L^2 + 2L - 2.5) = -0.2L + 2$$

  También presenta rendimientos marginales decrecientes.

- Para $10 < L \leq 12$:

$$q'(L) = \frac{d}{dL}(-0.5L + 12.5) = -0.5$$

  Aquí el producto marginal es constante, no hay rendimientos marginales decrecientes.

Respuesta: No podemos afirmar que hay rendimientos marginales decrecientes en todo el dominio de la función, ya que en el intervalo $(10, 12]$ el rendimiento marginal es constante.

pregunta 7

Una empresa produce un bien con la función de producción $q(L) = 10L - 0.5L^2$, donde L representa la cantidad de trabajo. Determine el intervalo al cual pertenece el óptimo técnico.

Solución:

Paso 1: Calculamos el producto medio del trabajo:

$$PM(L) = \frac{q(L)}{L} = \frac{10L - 0.5L^2}{L} = 10 - 0.5L$$

Paso 2: Calculamos el producto marginal del trabajo:

$$PMg(L) = \frac{d}{dL}(q(L)) = \frac{d}{dL}(10L - 0.5L^2) = 10 - L$$

Paso 3: Igualamos $PM(L)$ con $PMg(L)$ para hallar el óptimo técnico:

$$10 - 0.5L = 10 - L \quad \Rightarrow \quad -0.5L = -L \quad \Rightarrow \quad L = 0$$

Respuesta: El óptimo se daría cuando $L = 0$, pero este valor no es económicamente significativo, ya que implicaría no usar trabajo.

pregunta 8

La función de costos de una empresa es $C(q) = 5q + 0.2q^2$, donde q es la cantidad producida. ¿En qué nivel de producción el costo marginal empieza a ser mayor que el costo medio?

Solución:

Paso 1: Calculamos el **costo medio (CMe)**:

$$CMe(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{5q + 0.2q^2}{q} = 5 + 0.2q$$

Paso 2: Calculamos el **costo marginal (CMg)**:

$$CMg(q) = \frac{d}{dq}C(q) = \frac{d}{dq}(5q + 0.2q^2) = 5 + 0.4q$$

Paso 3: Igualamos para encontrar cuándo $CMg(q) = CMe(q)$:

$$5 + 0.4q = 5 + 0.2q \Rightarrow 0.2q = 0 \Rightarrow q = 0$$

Paso 4: Para $q > 0$, se cumple que:

$$CMg(q) > CMe(q)$$

Respuesta: El costo marginal comienza a ser mayor que el costo medio cuando $q > 0$.

pregunta 9

Considerando la función anterior, si usted solo utiliza la definición de la derivada, ¿cuál sería el costo marginal cuando el nivel de produccion es 0?

Solución:

Dado que el costo marginal es $CMg(q) = 5 + 0.4q$, al evaluar en $q = 0$ se obtiene:

$$CMg(0) = 5 + 0.4 \cdot 0 = 5$$

Respuesta: El costo marginal cuando la producción es cero es 5.

Bloque III: Preguntas de Aplicación Práctica

pregunta 10

Una empresa monopólica solicita a su practicante (llamado Owen) la función de demanda inversa que requiere para evaluar su política de fijación de precios. Asimismo, le piden que haga los cálculos considerando que la variable de control es la cantidad q. Sin embargo, Owen estuvo distraído y envió la siguiente información:

- Adjunto la función de demanda solicitada: $q(p) = a - bp$.
- Se está considerando como variable de control al precio p.

Si al final, la empresa no se da cuenta y Owen debe hacer lo que se pida a continuación con la información que él dispone (y que fue enviada a la empresa) (Revisar esa información si es necesario para evitar errores en el planteamiento del problema).

(a) Utilizando todos sus conocimientos adquiridos, determine las condiciones para los parámetros (es posible que deba reconvertir los parámetros o no para hacer esto) si la empresa busca garantizar que se esté maximizando sus beneficios definido como

$$\pi(q) = IT(q) - CT(q)$$

Solución:

- **Demanda directa:** $q(p) = a - bp$, con $b > 0$

Ingreso total: tomando como variable de control el precio.

$$IT(p) = p \cdot q(p) = p(a - bp) = ap - bp^2$$

Beneficio:

$$\pi(p) = IT(p) - CT(q(p)) = ap - bp^2 - CT(q(p))$$

Derivamos la función de beneficio con respecto a p:

$$\frac{d\pi}{dp} = a - 2bp - \frac{dCT(q)}{dp}$$

Usamos la regla de la cadena:

$$\frac{dCT(q)}{dp} = \frac{dCT}{dq} \cdot \frac{dq}{dp} = Cmg(q) \cdot q'(p)$$

Como $q'(p) = -b$, entonces:

$$\frac{dCT(q)}{dp} = -b \cdot Cmg(q)$$

Sustituyendo:

$$\frac{d\pi}{dp} = a - 2bp + b \cdot Cmg(q)$$

Condición de primer orden para máximo:

$$\frac{d\pi}{dp} = 0 \Rightarrow a - 2bp + b \cdot Cmg(q) = 0$$

Despejando p:

$$p = \frac{a}{2b} + \frac{1}{2}Cmg(q)$$

Condiciones necesarias sobre los parámetros:

- $a > 0$: Para asegurar demanda positiva.
- $b > 0$: Para que la demanda sea decreciente.

(b) Utilizando funciones generales como $q(p)$, $IT(q)$, $CT(q)$, ¿es posible obtener una regla de fijación de precios que dependa del costo marginal y la elasticidad precio (ε_p) de la demanda? Si es sí, hallarlo (Ayuda: despejas p al final), y si no, justifique brevemente (Ayuda: debes usar notación matemática y un procedimiento ordenado para justificar la imposibilidad). (Más ayudas: Recuerde que la variable de control es el precio p y que debes aplicar la regla de la cadena para lo cual se debe plantear bien el problema a resolver).

Solución:

- **Demanda directa:** $q = q(p)$
- **Ingreso total:** $IT(p) = p \cdot q(p)$
- **Costo total:** $CT(q(p))$
- **Beneficio:**

$$\pi(p) = IT(p) - CT(q(p)) = p \cdot q(p) - CT(q(p))$$

Paso 1: Derivada del beneficio respecto a p

$$\frac{d\pi}{dp} = \frac{dIT}{dp} - \frac{dCT}{dp} = \left(q(p) + p \cdot \frac{dq}{dp}\right) - \left(\frac{dCT}{dq} \cdot \frac{dq}{dp}\right)$$

$$\frac{d\pi}{dp} = q(p) + (p - Cmg(q)) \cdot \frac{dq}{dp}$$

Paso 2: Condición de máximo

$$\frac{d\pi}{dp} = 0 \Rightarrow q(p) + (p - Cmg(q)) \cdot \frac{dq}{dp} = 0$$

Despejamos:

$$(p - Cmg(q)) \cdot \frac{dq}{dp} = -q(p)$$

Paso 3: Usamos la elasticidad-precio de la demanda

$$\varepsilon_p = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{dq}{dp} = \varepsilon_p \cdot \frac{q}{p}$$

Sustituimos en la ecuación anterior:

$$(p - Cmg(q)) \cdot \varepsilon_p \cdot \frac{q}{p} = -q$$

Cancelamos q en ambos lados:

$$(p - Cmg(q)) \cdot \frac{\varepsilon_p}{p} = -1$$

Multiplicamos ambos lados por p:

$$(p - Cmg(q)) \cdot \varepsilon_p = -p$$

Despejamos p:

$$p = \frac{Cmg(q)}{1 + \frac{1}{\varepsilon_p}}$$

Respuesta: La regla de fijación de precios para el monopolista es:

$$p = \frac{Cmg(q)}{1 + \frac{1}{\varepsilon_p}}$$