Anualidades

Garay Iman Arelis
Undergraduate
Economist
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
arelis.garay@unmsm.edu.pe

Vilcapoma Ramos Luis Heber
Undergraduate
Economist
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
ever07.vilcapomar@gmail.com

Aliaga Maximiliano Andrea Carla
Undergraduate
Administrator
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Andrea.aliagam@unmsm.edu.pe

Disponible en: https://mundosocial-peru.blogspot.com

Este documento es un apunte del tema de anualidades del curso de Matemática Financiera.

Subtemas a tocar

1. Definiciones previas
2. Definición de anualidades
3. Tipos
4. Anualidades vencidas
5. Anualidades anticipadas
6. Conclusiones
7. Ejercicios aplicativos

1. Definiciones previas

1. **Dinero:** Es todo aquello que se acepte para el intercambio de bienes o servicios. Cumple con ser medio de pago, unidad de cuenta y depósito de valor (acumular riqueza).

2. **Año comercial o bancario:** Se refiere a un período de 360 días.

3. **Capitalización:** Es añadir intereses al principal o capital inicial. En el caso de interés simple solo hay una capitalización y es al final del período (es monocapitalizado) mientras que en el interés compuesto se realizan varias capitalizaciones (es multicapitalizado).

4. **Interés:** Es la diferencia entre el valor final (monto) y el valor presente (principal), también se le puede definir como el valor del dinero en el tiempo. Ejemplo: Si hoy se presta S/100 y se devuelve dentro de 1 año S/150, el interés es S/50.

$$\text{INTERÉS} = \text{MONTO - PRINCIPAL}$$

   El interés también se define como el dinero que se paga por el uso del dinero ajeno, o el rendimiento que se tiene al invertir en forma productiva el dinero.

2. Anualidades

Las anualidades son una serie de pagos (o cobros) generalmente iguales que se realizan en intervalos de tiempo regulares (mensuales, trimestrales, semestrales, etc.) durante un período determinado, y que están sujetas a una tasa de interés constante.

1. **Serie de pagos (o cobros) generalmente iguales:** Decimos "generalmente iguales" porque en la mayoría de los casos los pagos son constantes, pero se reconoce que existen tipos de anualidades en las que los montos varían, por lo cual no siempre son estrictamente iguales.

2. **Se realizan en intervalos de tiempo regulares durante un período determinado:** Los pagos que conforman una anualidad se efectúan en momentos separados por lapsos de tiempo iguales, es decir, en intervalos regulares como cada mes, trimestre, semestre, año, etc. Además, estos pagos se llevan a cabo dentro de un plazo definido, lo que significa que la anualidad tiene una duración limitada y conocida desde el inicio.

3. **Sujetas a una tasa de interés constante:** Se asume que todos los pagos o cobros están sujetos a una misma tasa de interés a lo largo del tiempo.

3. Tipos de anualidades

1. Según el tiempo

Anualidades ciertas: Fechas de inicio y fin definidas desde el inicio. Se sabe cuándo empieza y termina el flujo de pagos.

Anualidades eventuales o contingentes: No se sabe con certeza cuándo comenzarán o finalizarán los pagos, ya que dependen de un evento incierto.

2. Según el momento del pago

Anualidades ordinarias o vencidas: Los pagos se hacen **al final** de cada período.

Anualidades anticipadas: Los pagos se hacen **al inicio** de cada período.

3. Según los períodos de capitalización o pago

Anualidades simples: El período de pago coincide con el período de capitalización.

Ejemplo: Pago bimestral con interés del 2.5% bimestral.

Anualidades generales: El período de pago no coincide con el período de capitalización.

Ejemplo: Pago mensual con interés del 22% anual.

4. Según el momento del primer pago

Anualidades inmediatas: El primer pago se realiza en el **primer período**.

Anualidades diferidas: El primer pago se realiza después de uno o más períodos.

5. Según la duración del horizonte temporal

Anualidades temporales: Tienen un horizonte definido con fecha de término conocida.

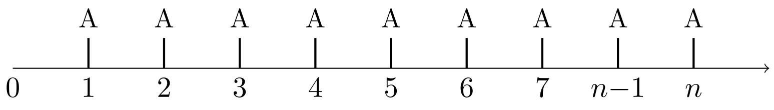
Anualidades perpetuas: No tienen una fecha de término. Se asume que el flujo de pagos es indefinido.

Dato: La anualidad más común es finanzas es la cierta, vencida, simple, inmediata y temporal.

4. Anualidades vencidas

Los pagos de las anualidades vencidas, se realizarán al final de cada período.

Diagrama de tiempo de una anualidad vencida



En el caso de las anualidades vencidas, es más conveniente ver a los números como el fin de cada período. Por ejemplo:

Número 1 : fin del período 1
Número 2 : fin del período 2
Número 3 : fin del período 3
Número n : fin del período n

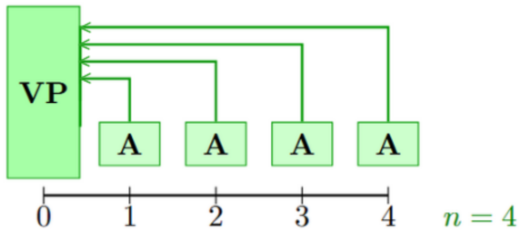
Fórmulas

Valor presente de una anualidad vencida

$$VP = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^n} \iff \boldsymbol{VP = A \cdot \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)}$$

Donde:

- i = Tasa de interés compuesta
- A = Anualidad
- n = Número de períodos



Factor actualización de la serie (FAS):

Factor $\dfrac{1-[1+i]^{-n}}{i}$ → Transforma una serie de rentas uniformes en un valor presente.

La función del FAS, es traer del futuro (S) hacia el presente las (A) que componen la anualidad, actualizándolas durante los períodos del horizonte temporal.

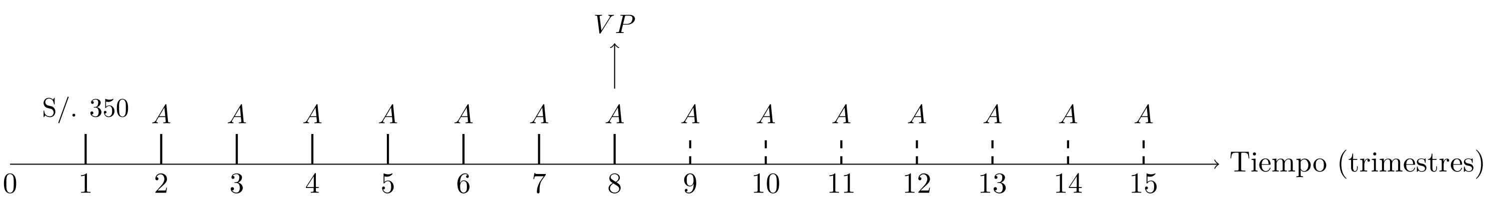
Ejemplo:
Un crédito mutual fue pactado a ser cancelado en 15 cuotas uniformes de S/. 350 cada una, cada fin de trimestre pagando una TNA del 37%. El cliente, habiendo cumplido puntualmente sus pagos, al vencimiento de la octava cuota decide cancelarla conjuntamente con las cuotas insolutas. ¿Cuál es el importe total a cancelar en esa fecha?

Solución:

Datos:

- Anualidad trimestral: S/. 350.00
- Tasa nominal anual: 37%
- Capitalización: trimestral
- Pagos: trimestrales
- Número de cuotas: n = 7
- Tipo de anualidad: vencida (las cuotas se hacen al final de cada trimestre)

Diagrama de tiempo:



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TNA de 37% capitalizable cada trimestre, pero los pagos que se hicieron son trimestrales así que realizaremos la conversión.

$$\text{TNA} \rightarrow \text{TNT} = \frac{\text{TNA}}{4} = \frac{37\%}{4} = 9.25\%$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula del valor presente de una anualidad vencida

Tenemos ahora una TET de 9.25%. El problema nos pide hallar el importe total a cancelar al vencimiento de la octava cuota, considerando que el cliente desea cancelar en ese momento todas las cuotas insolutas junto con la cuota 8. Esto equivale a determinar el valor presente de las cuotas insolutas (de la 9 a la 15) en el momento 8, y luego sumarle la cuota 8, que también debe pagarse en esa fecha.

$$VP = 350 \cdot \left(\frac{1 - (1 + 0.0925)^{-7}}{0.0925} \right) = 1\ 746.8534$$

$$\text{Total} = 350 + 1\,746.8534 = 2\,096.8534$$

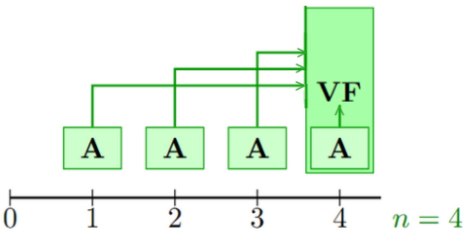
Respuesta: El importe a cancelar en esa fecha será de S/. 2 096.8534

Valor futuro de una anualidad vencida

$$VF = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \cdots + A(1+i)^{1} + A \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{VF = A \cdot \left(\frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \right)}$$

Donde:

- i = Tasa de interés compuesta
- A = Anualidad
- n = Número de períodos



Factor capitalización de la serie (FCS):

Factor $\dfrac{[1+i]^{n} - 1}{i}$ → Transforma una serie de rentas uniformes en un valor futuro.

La función del FCS, es trasladar a un momento cualquiera del futuro (S) las (A) que componen la anualidad, capitalizándolas durante los períodos del horizonte temporal.

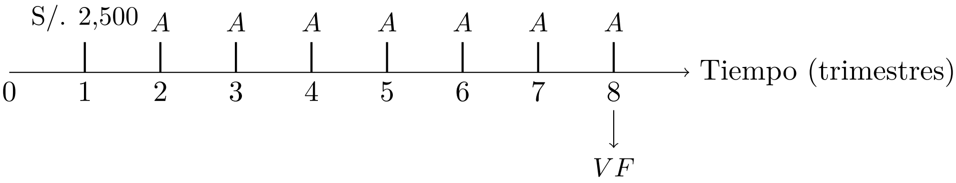
Ejemplo:
Una persona deposita en una cuenta de ahorros al final de cada trimestre un importe constante de S/. 2 500. ¿Qué monto acumulará en el plazo de dos años percibiendo una TNA del 27.50% capitalizable trimestralmente?

Solución:

Datos:

- Anualidad trimestral: S/. 2 500.00
- Tasa nominal anual: 27.50%
- Capitalización: trimestral
- Pagos: trimestrales
- Número de cuotas: n = 2 años = 8 trimestres
- Tipo de anualidad: vencida (las cuotas se hacen al final de cada trimestre)

Diagrama de tiempo:



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TNA de 27.50% capitalizable cada trimestre, pero los pagos que se hicieron son trimestrales así que realizaremos la conversión.

$$\text{TNA} \rightarrow \text{TNT} = \frac{\text{TNA}}{4} = \frac{27.50\%}{4} = 6.875\%$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula del valor futuro de una anualidad vencida

Tenemos ahora una TET de 6.875%. El problema nos pide hallar el monto acumulado al final de los dos años realizando depósitos trimestrales de S/. 2 500. Esto equivale a determinar el valor futuro de los depósitos.

$$VF = 2500 \cdot \left(\frac{(1 + 0.06875)^8 - 1}{0.06785} \right) = 25\ 534.3225$$

Respuesta: El monto acumulado será de S/. 25 534.3225

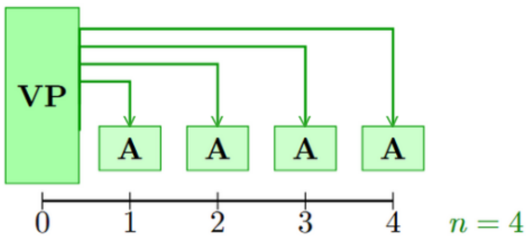
Renta de una anualidad vencida

En función al Valor Presente

$$A = VP \cdot \left(\frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right)$$

Donde:

- i = Tasa de interés compuesta
- A = Anualidad
- n = Número de períodos



Factor de recuperación del capital (FRC):

Factor $\dfrac{i * [1+i]^n}{(1+i)^n - 1}$ $\rightarrow$ Transforma un valor presente en un conjunto de rentas equivalentes.

La función del FRC, es determinar el valor periódico A necesario para recuperar totalmente un capital (P), mediante pagos constantes que cubren tanto el capital como los intereses generados en el horizonte temporal.

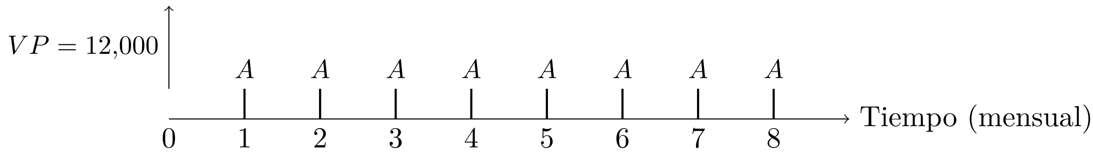
Ejemplo:
La empresa Equipos S.A. vende sus máquinas al contado en \$ 17 000 pero debido a que ha conseguido un financiamiento del exterior está planeando efectuar ventas al crédito con una cuota inicial de \$ 5 000 y ocho cuotas mensuales uniformes. Sí la TEA a cargar al financiamiento es del 25 %, calcule el importe de las cuotas del programa de ventas a plazo. **Solución:**

Datos:

- Precio actual: $ 17 000.00

- Cuota inicial: \$ 5 000.00
- Valor a financiar: $VP = 17{,}000 - 5{,}000 = 12{,}000$
- Tasa efectiva anual: 25%
- Pagos: mensuales
- Número de cuotas: $n = 8$
- Tipo de anualidad: vencida (las cuotas se hacen al final de cada mes)

Diagrama de tiempo:



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TEA de 25%, pero los pagos que se hicieron son mensuales así que realizaremos la conversión.

$$\text{TEA} \rightarrow \text{TEM} = (1 + 0.25)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.018769$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula de la anualidad en función al valor presente

Tenemos ahora una TEM de 1.8769% . El problema nos pide hallar el importe de las cuotas que deben pagarse mensualmente. Esto equivale a determinar el valor de la cuota uniforme que, al ser descontada a la tasa efectiva mensual durante los 6 meses, sea equivalente al saldo financiado de \$12,000.

$$A = 12000 \cdot \left(\frac{0.01877 * (1 + 0.01877)^8}{(1 + 0.01877)^8 - 1} \right) = 1\ 629.4381$$

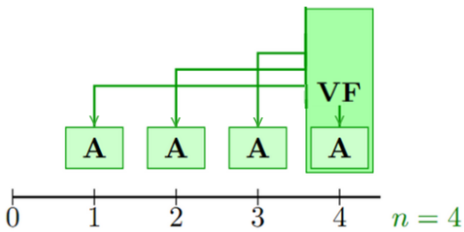
Respuesta: El importe de cada cuota mensual fue \$ 1 629.4381

En función al Valor Futuro

$$A = VF \cdot \left(\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right)$$

Donde:

- i = Tasa de interés compuesta
- A = Anualidad
- n = Número de períodos



Factor de depósito al fondo de amortización (FDFA):

Factor $\dfrac{i}{(1 + i)^n - 1}$ $\rightarrow$ Transforma un valor futuro en un conjunto de rentas equivalentes.

La función del FDFA, permite calcular el valor constante A que debe depositarse periodicamente en un fondo, de forma que al final del plazo se acumule el monto total (S).

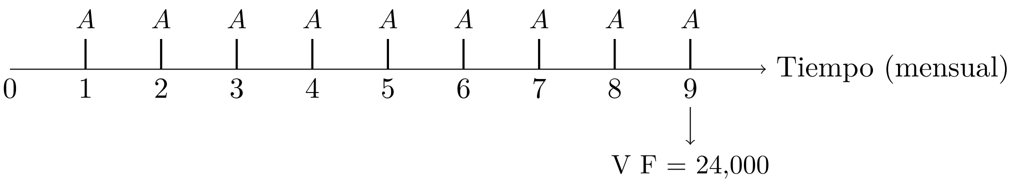
Ejemplo:
El programa de inversiones de Productos Industriales S.A. (Prodinsa) planea adquirir dentro de nueve meses un equipo de computación interconectado para toda su empresa a un costo de $ 24 000. La Gerencia Financiera de Prodinsa puede colocar sus excedentes mensuales de caja en una institución financiera que paga una TEA del 28.25%. ¿Qué importe constante de fin de mes deberá ahorrar para acumular los $ 24 000 al final del noveno mes?

Solución:

Datos:

- Monto: $ 24 000.00
- Tasa efectiva anual: 28.25%
- Pagos: mensuales
- Número de cuotas: $n = 9$
- Tipo de anualidad: vencida (las cuotas se hacen al final de cada mes)

Diagrama de tiempo:



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TEA de 28.25%, pero los pagos que se hicieron son mensuales, así que realizaremos la conversión.

$$\text{TEA} \rightarrow \text{TEM} = (1 + 0.2825)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.020951$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula de la anualidad en función al valor futuro

Tenemos ahora una TEM de 2.0951%. El problema nos pide hallar el importe constante que deberá ahorrar cada mes para poder acumular los $24 000 al final del noveno mes. Esto equivale a determinar el valor de la cuota uniforme que, capitalizándose mensualmente a la tasa efectiva mensual durante 9 meses, permita alcanzar el monto objetivo.

$$A = 24000 \cdot \left(\frac{0.020951}{(1 + 0.020951)^9 - 1} \right) = 2\ 450.9076$$

Respuesta: El importe constante que deberá ahorrar al final de cada mes es de $2 450.9076

Observación

Esta fórmula permite convertir una anualidad vencida (Av) en una anualidad adelantada (Aa), descontando un periodo de interés.

Conversión de una anualidad vencida a una anualidad adelantada

$$Aa = \left(\frac{Av}{1 + i} \right)$$

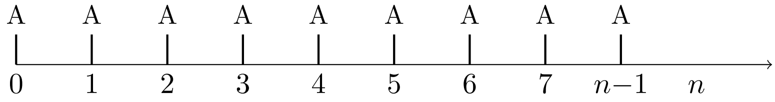
Donde:

- i = Tasa de interés compuesta
- Aa = Anualidad Anticipada
- Av = Anualidad Vencida

5. Anualidades anticipadas

Los pagos de las anualidades anticipadas a comparación de las anualidades vencidas, se realizarán al inicio de cada período.

Diagrama de tiempo de una anualidad anticipada



Cada número que aparece en el gráfico representa o bien el inicio de un período o final de otro. En el caso de las anualidades anticipadas es más conveniente ver a los números como el inicio de cada período. Por ejemplo:

Número 0 : inicio del período 1
Número 1 : inicio del período 2
Número 2 : inicio del período 3
Número n-1 : inicio del período n

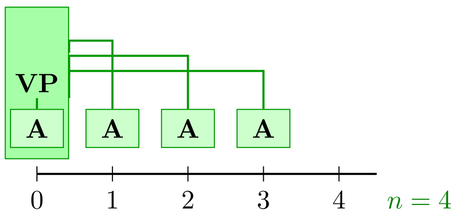
Fórmulas:

Valor presente de una anualidad anticipada

$$VP = A + \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} \iff \boldsymbol{VP = A \cdot \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \cdot (1+i)}$$

Donde:

- i = Tasa de interés compuesta
- A = Anualidad
- n = Número de períodos



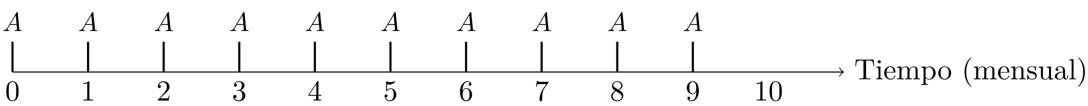
Nota: Es importante que la tasa de interés tenga la misma periodicidad que los flujos de los pagos. Por ejemplo, si los pagos se están realizando cada mes y la tasa de interés efectiva es anual es necesario hacer la conversión de la TEA a una TEM.

Ejemplo:
Calcule el precio de contado de cierta pieza de maquinaria por la que se hicieron 10 pagos mensuales consecutivos de \$ 3 559.80 cada uno. El primer pago fue de inmediato y la tasa de interés de la operación fue del 25.44% capitalizable cada mes.
Solución:

Datos:

- Anualidad: \$ 3 559.80
- Tasa nominal anual: 25.44% capitalizable cada mes
- Pagos: mensuales
- Número de cuotas: $n = 10$
- Tipo de anualidad: anticipada (las cuotas se hacen al inicio de cada mes)

Diagrama de tiempo:



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TNA de 25.44% capitalizable cada mes y los pagos que se hicieron son mensuales así que realizaremos la conversión para obtener la tasa efectiva que usaremos.

$$\text{TNA} \rightarrow \text{TNM} = \frac{\text{TNA}}{12} = \frac{25.44\%}{12} = 2.12\% = \text{TEM}$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula del valor presente de una anualidad anticipada

Tenemos ahora una TNM de 2.12% capitalizable cada mes lo que equivale a una TEM de 2.12%. El problema nos pide hallar el precio de contado de una máquina por lo que se refiere al valor que tenía esa máquina si lo hubiera comprado con un pago en ese momento, ello equivale a determinar el valor presente de los pagos mensuales realizados.

$$VP = 3\ 559.8 \cdot \left(\frac{1-(1+2.12\%)^{-10}}{2.12\%} \right) \cdot (1+2.12\%) = 32\ 450.02916$$

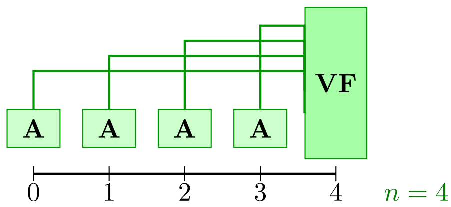
Respuesta: El precio de contado de la máquina fue $ 32 450.02916

Valor futuro de una anualidad anticipada

$$VF = A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + \cdots + A(1+i)^1 \iff \boldsymbol{VF = A \cdot \left(\frac{(1+i)^n + 1}{i} \right) \cdot (1+i)}$$

Donde:

- i = Tasa de interés compuesta
- A = Anualidad
- n = Número de períodos

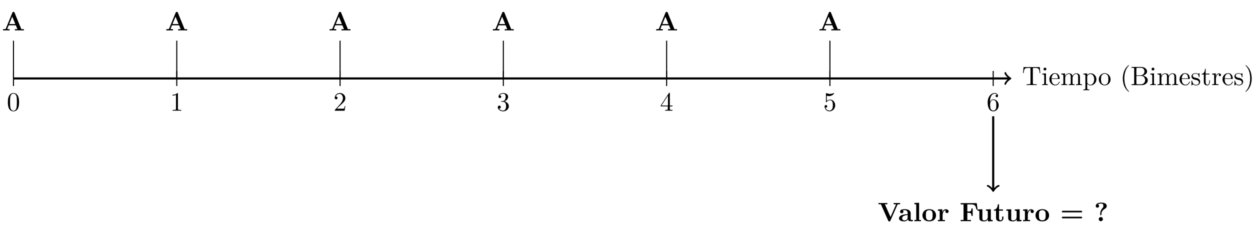


Ejemplo:
El señor Solís alquiló una bodega cobrando una renta bimestral de $ 110 000 y estipulándose en el contrato que los pagos deberán ser depositados en una cuenta de ahorro al inicio de cada bimestre. Si el banco paga una tasa de interés del 8.64% anual capitalizable bimestralmente, ¿cuánto tendrá el señor Solís al cabo de un año?
Solución:

Datos:

- Anualidad: $ 110 000
- Tasa nominal anual: 8.64% anual capitalizable bimestralmente
- Pagos: bimestrales
- Número de cuotas: $n = 6$ (en un año hay 6 bimestres)
- Tipo de anualidad: anticipada (las cuotas se hacen al inicio de cada bimestre)

Diagrama de tiempo:



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TNA de 8.64% capitalizable cada bimestre y los pagos que se hicieron son bimestrales así que realizaremos la conversión para obtener la tasa efectiva que usaremos.

$$\text{TNA} \rightarrow \text{TNB} = \frac{\text{TNA}}{6} = \frac{8.64\%}{6} = 1.44\% = \text{TEB}$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula del valor futuro de una anualidad anticipada

Tenemos ahora una TNB de 1.44% capitalizable cada bimestre lo que equivale a una TEB de 1.44%. Ahora usamos la fórmula del VF de una anualidad anticipada para poder hallar el valor que tendrá el señor Solís en el banco después de un año.

$$VF = 110\ 000 \cdot \left(\frac{(1 + 1.44\%)^6 - 1}{1.44\%} \right) \cdot (1 + 1.44\%) = 694\ 073.9318$$

Respuesta: Al cabo de un año, el señor Solís tendrá $ 694 073.9318.

6. Conclusiones

Las anualidades no deben entenderse solo como herramientas analíticas que permiten establecer equivalencias, sino que representan un componente esencial dentro del análisis financiero, al ofrecer un marco estructurado para comprender y gestionar flujos de efectivo periódicos, bajo condiciones de regularidad y tasa de interés constante a lo largo del horizonte temporal. A través de la distinción entre anualidades vencidas y anticipadas, es posible aplicar con precisión los métodos de valoración adecuados, según las características temporales y financieras de cada caso.

En síntesis, el dominio conceptual y operativo de las anualidades fortalecerá no solo las competencias en los cursos relacionados con temas financieros, sino también la capacidad crítica para evaluar y planificar múltiples alternativas.

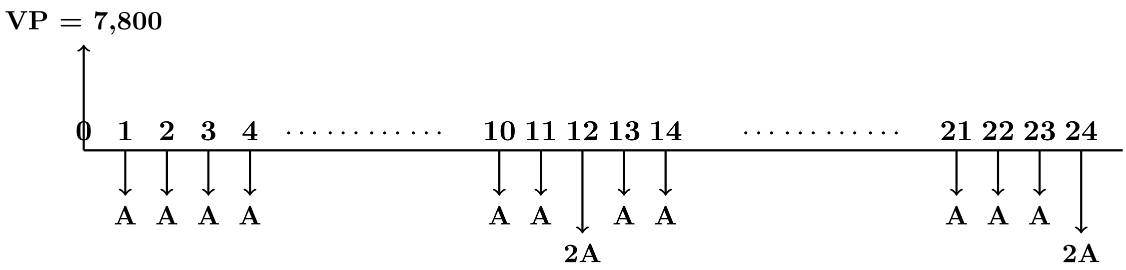
7. Ejercicios aplicativos

Ejercicios de anualidades vencidas

Ejercicio 1
Marcos Mendoza compra un televisor a crédito en Curacao, cuyo precio de contado es S/ 7 800 y acordó pagarlo en 24 mensualidades iguales, (comenzando a pagar a fin del primer mes). El contrato también estipula que el comprador deberá pagar en el mes de diciembre de ambos años cuotas dobles. El televisor se adquirió el 1 de enero de 2022. Si la tasa de interés que cobra Curacao es de 20% efectiva anual, ¿acuánto ascienden los pagos mensuales normales que debe realizar? Nota: Usar año comercial 360 días.
Solución:

- Valor presente: S/ 7 800
- Tasa efectiva anual: 20%
- Pagos: mensuales (cada mes)
- Pagos dobles: mes 12 y mes 24
- Número de cuotas: $n = 24$
- Tipo de anualidad: vencida (las cuotas se hacen al final de cada mes)

Diagrama de tiempo:



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TEA de 20%, pero los pagos que se hicieron son mensuales así que realizaremos la conversión.

$$\text{TEA} \rightarrow \text{TEM} = (1 + 0.20)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.015309$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula del valor presente de una anualidad vencida

Tenemos ahora un TEM de 1.5309%. El problema nos pide calcular cuánto debe pagar cada mes el comprador, sabiendo que en diciembre de cada año (mes 12 y mes 24) deberá pagar el doble de la cuota normal. Lo que se busca es que la suma del valor presente de todas las cuotas, incluyendo esas dos cuotas dobles, sea igual al precio de contado del televisor, que es S/ 7 800.

$$7\ 800 = A \cdot \left(\frac{1 - (1 + 0.015309)^{-24}}{0.015309} \right) + \frac{A}{(1 + 0.015309)^{12}} + \frac{A}{(1 + 0.015309)^{24}}$$

$$7\ 800 = A \cdot 19.95871 + \ A \cdot 0.83334 \ + A \cdot 0.69445$$

$$7{,}800 = A \cdot 21.4865$$

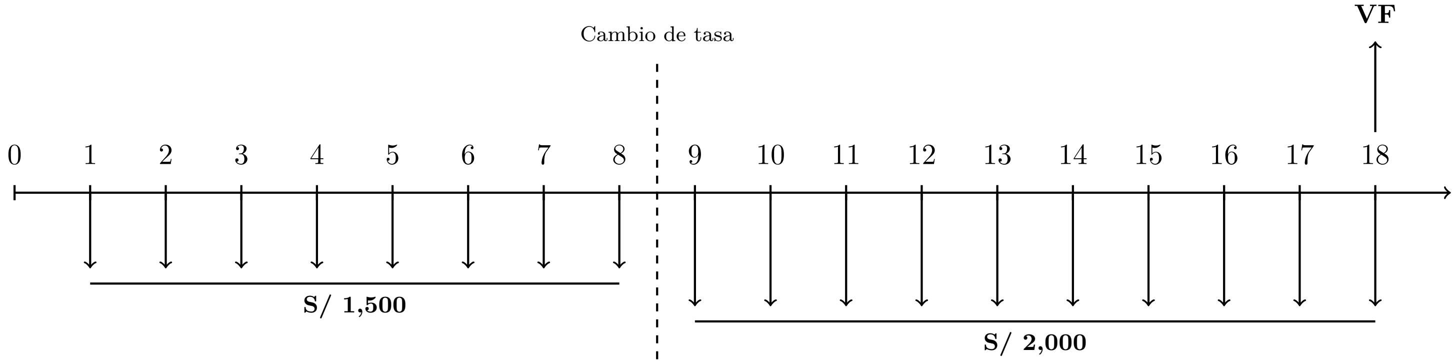
$$A = \frac{7{,}800}{21.4865} \approx \boxed{363.02}$$

Respuesta: Los pagos mensuales que se deben realizar son de S/ 363.02

Ejercicio 2
Un ahorrador decide hacer depósitos por mes vencido durante un año y medio de S/ 1, 500 en una entidad que le paga una tasa de interés del 20% anual. Al llegar a hacer el noveno depósito, le informan que la tasa de interés ha aumentado al 26% anual. Por tanto, decide aumentar a S/2, 000 el valor de los depósitos. ¿Qué valor tiene acumulado al final del año y medio?
Solución:

- Primera anualidad: S/ 1 500
- Segunda anualidad: S/ 2 000
- Tasa efectiva anual: 20% para la anualidad 1 y 26% para la anualidad 2
- Pagos: mensuales (cada mes)
- Número de cuotas: $n = 18$
- Tipo de anualidad: vencida (las cuotas se hacen al final de cada mes)

Diagrama de tiempo:



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TEA de 20% y una TEA de 26%, pero los pagos que se hicieron son mensuales, así que realizaremos la conversión.

$$\text{TEA} \to \text{TEM} = (1 + 0.20)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.015309$$

$$\text{TEA} \to \text{TEM} = (1 + 0.26)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.019446$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula del valor futuro de una anualidad vencida

Tenemos ahora dos tasas efectivas mensuales: la primera, una TEM 1.5309% que se aplica durante los primeros 8 depósitos, y la segunda de 1.9446% aplicable a partir del noveno depósito. El problema nos pide determinar el monto acumulado al finalizar el mes 18, considerando ambas series de depósitos.

En primer lugar se calcula el valor acumulado en la cuenta de ahorros al final del mes 8:

$$VF = 1500 \cdot \left(\frac{(1 + 0.015309)^8 - 1}{0.015309} \right) = 12\,663.046$$

Con VF en el mes 18, se plantea la ecuación de valor:

$$VF = 12\,663.046 \cdot (1 + 0.019446)^{10} + 2000 \cdot \left(\frac{(1 + 0.019446)^{10} - 1}{0.019446} \right) \approx \boxed{37\,196.604}$$

Respuesta: El valor acumulado al final de los 18 meses es aproximadamente S/ 37 196.604

Ejercicio 3

Micaela Ramos mantiene una deuda con el banco generada hace 6 años atrás, hasta el momento ha pagado cuotas mensuales de S/ 800.00 y le faltan pagar 60 cuotas. La deuda la pacto a 25% TEA. Revisando las condiciones de mercado Micaela ha tomado la decisión de conversar con su banquero para solicitarle se le reduzca la tasa de interés del 25% al 15% y cancelar el saldo de la deuda en sólo 3 años, mediante cuotas fijas mensuales y entregando una inicial de S/ 10 000.00 ¿Cuál será el valor de la nueva cuota fija?

Solución:

- Cuotas mensuales anteriores: S/ 800.00
- Cuotas restantes: 60
- Tasa efectiva anual: 25%
- Nueva tasa efectiva anual: 15%
- Pago inicial nuevo: S/ 10 000.00
- Nuevo plazo: 3 años = 36 meses
- Tipo de anualidad: vencida (Las cuotas se hacen al final de cada mes)

Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TEA de 25% y una TEA de 15%, pero los pagos que se hicieron son mensuales así que realizaremos la conversión.

$$\text{TEA} \to \text{TEM} = (1 + 0.25)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.018769$$
$$\text{TEA} \to \text{TEM} = (1 + 0.15)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.011715$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula del valor presente de una anualidad vencida

Como aún quedan 60 pagos mensuales por realizar bajo las condiciones originales del préstamo, calculamos el valor presente de dicha anualidad utilizando la TEM correspondiente. Esto nos permite conocer el monto que representa hoy el saldo total de la deuda.

$$VP = 800 \cdot \left(\frac{1 - (1 + 0.018769)^{-60}}{0.018769} \right) = 29\ 166.293$$

Paso 3: Calculamos el valor a financiar

El valor presente obtenido en el paso anterior se reduce con el pago inicial entregado por Micaela, dando como resultado el monto que será financiado con las nuevas condiciones.

$$\text{Nuevo saldo a financiar} = 29\,166.293 - 10\,000 = 19\,166.293$$

Paso 4: Aplicamos la fórmula de la anualidad en función del valor presente

Conocido el saldo a financiar luego del pago inicial, utilizamos la fórmula para calcular el valor de la nueva cuota fija que Micaela deberá pagar durante los 36 meses restantes, bajo la nueva tasa pactada.

$$A = 19\ 166.293 \cdot \left(\frac{0.011715 * (1 + 0.011715)^{36}}{(1 + 0.011715)^{36} - 1} \right) \approx \boxed{655.60}$$

Respuesta: El valor de la nueva cuota fija es aproximadamente S/ 665.60

Ejercicios de anualidades anticipadas

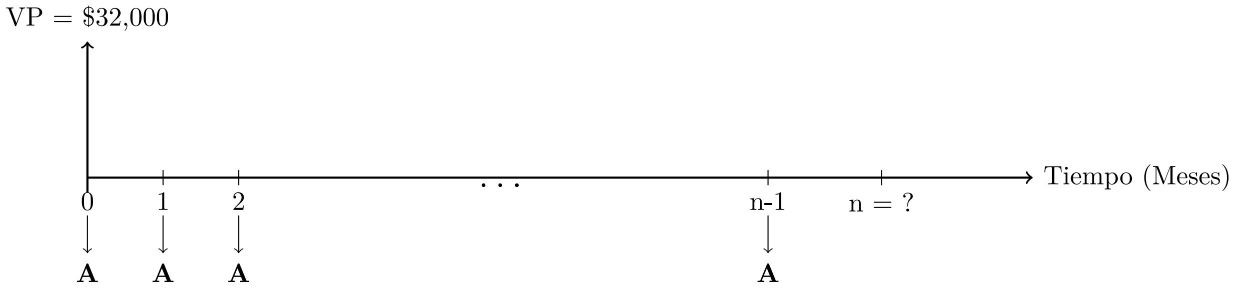
Ejercicio 1:
En Muebles Típicos se vende un juego completo de sala y comedor en \$ 32 000 al contado, o bien, mediante pagos mensuales anticipados de \$ 2 195. Si el interés es del 30% convertible cada mes, ¿cuántos pagos es necesario realizar? En caso de que el número de pagos no sea entero,

a) ¿cuál será el pago mensual, si el resultado se redondea al entero más cercano? y

b) ¿cuál será el valor del pago complementario?
Solución:

Diagrama de tiempo:

- Anualidad 1: \$ 2 195
- Anualidad 2: C
- Tasa nominal anual: 30% convertible cada mes
- Pagos: mensuales
- Número de cuotas: Para la anualidad 1 : n y para la anualidad 2 : n redondeado al entero más cercano
- Tipo de anualidad: anticipada (los pagos se hacen al inicio de cada período)



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TNA de 30% convertible (capitalizable) cada mes y los pagos que se hicieron son mensuales, así que realizaremos la conversión para obtener la tasa efectiva mensual.

$$\text{TNA} \to \text{TNM} = \frac{\text{TNA}}{12} = \frac{30\%}{12} = 2.5\% = \text{TEM}$$

Paso 2: Calculamos la cantidad de los pagos

Al tener como dato el valor de contado de el juego de sala, podemos usarlo para poder hallar el número de pagos a traves de la fórmula del VP de una anualidad anticipada.

$$32\,000 = 2\,195\left[\frac{1-(1+2.5\%)^{-n}}{2.5\%}\right]\cdot(1+2.5\%)$$

$$(1+2.5\%)^{-n} = 1-\left[\frac{32\,000}{2\,195\cdot(1+2.5\%)}\cdot 2.5\%\right]$$

$$-n\cdot\log(1+2.5\%) = \log\left[1-\frac{32\,000}{2\,195\cdot(1+2.5\%)}\cdot 2.5\%\right]$$

$$n = \frac{-\log\left[1-\frac{32\,000}{2\,195\cdot(1+2.5\%)}\cdot 2.5\%\right]}{\log(1+2.5\%)}$$

$$n = 17,7946$$

Parte a:

Al redondear el número de períodos al entero más cercano (n=18) tendríamos una anualidad diferente (anualidad 2 = C), usamos nuevamente la fórmula del VP para hallar ese nuevo valor.

$$32\,000 = C \left[\frac{1-(1+2.5\%)^{-18}}{2.5\%}\right] \cdot (1+2.5\%)$$

$$C = 2\,175,0659$$

Respuesta: El pago mensual, si el resultado se redondea al entero más cercano es \$ 2 175,0659.

Parte b:

Para poder hallar el valor complementario debemos redondear el entero más cercano hacia abajo (n=17). Usamos la fórmula del VP considerando los pagos de \$ 2 195 y hallamos la diferencia del valor de contado con ese valor. Una vez realizada la resta obtenemos el pago complementario, pero en el mes 0 usamos la fórmula del VF de un monto compuesto para llevarlo al mes 16 (n-1), cabe aclarar que en el mes 16 es donde se realiza el pago número 17.

$$VP = 2195 \left[\frac{1-(1+2.5\%)^{-17}}{2.5\%}\right] \cdot (1+2.5\%)$$

$$VP = 30\,850,7308$$

$$Diferencia = 32\,000 - 30\,850,7308 = 1\,149,2692$$

$$1\,149,2692(1+2.5\%)^{18} = 1\,748,7489$$

Respuesta: El valor del pago complementario es \$ 1 748,7489.

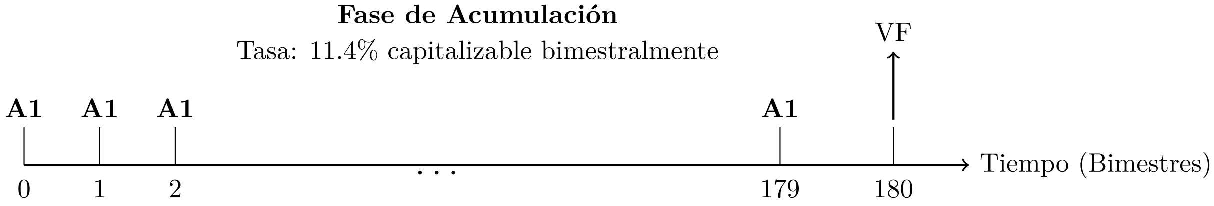
Ejercicio 2
Cuando Lourdes cumplió los 35 años de edad abrió un fondo de ahorro para el retiro, el cual pagó un interés del 11.4% capitalizable bimestralmente, depositando en él \$ 1500 al inicio de cada bimestre, durante 30 años. Lourdes cumple hoy 65 años de edad y empieza su jubilación. Piensa retirar de su fondo de jubilación \$ 20 500 cada mes, empezando en este momento. Si el fondo de retiro paga ahora un interés del 10.6% capitalizable cada mes, ¿cuántos retiros podrá realizar?
Solución:

Datos:

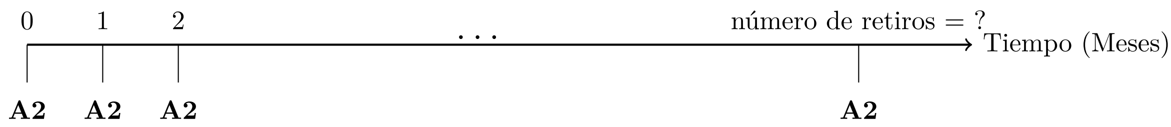
- Anualidad 1: \$ 1 500
- Anualidad 2: \$ 20 500
- Tasa nominal anual: 11,4% capitalizable cada bimestralmente para la anualidad 1 y 10,6% capitalizable cada mes para la anualidad 2
- Pagos y retiros: bimestrales para la anualidad 1 y mensuales para la anualidad 2
- Número de cuotas: Para la anualidad 1 : 180 (en 30 años hay 180 bimestres) y para la anualidad 2 : n
- Tipo de anualidad: anticipada (las cuotas se hacen al inicio de cada período)

Diagrama de tiempo:

Fase de Acumulación
Tasa: 11.4% capitalizable bimestralmente



Fase de Retiro
Tasa: 10.6% capitalizable mensualmente



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TNA de 11.4% capitalizable cada bimestre y los pagos que se hicieron son bimestrales, así que realizaremos la conversión para obtener la tasa efectiva bimestral. De igual manera, realizamos el mismo procedimiento para la TNA de 10.6% capitalizable cada mes.

$$\text{TNA} \to \text{TNB} = \frac{\text{TNA}}{6} = \frac{11,4\%}{6} = 1.9\% = \text{TEB}$$

$$\text{TNA} \to \text{TNM} = \frac{\text{TNA}}{12} = \frac{10,6\%}{12} = 0.8833\% = \text{TEM}$$

Paso 2: Calculamos el VF de la primera anualidad

Calculamos el VP de anualidad asociada a la fase de acumulación de depósitos para poder hallar cuanto ha ahorrado hasta hoy (cuando Lourdes ya cumple 65 años y empieza a jubilarse)

$$VF = 1\,500\left[\frac{(1+1.9\%)^{180}-1}{1.9\%}\right]\cdot(1+1.9\%) = 2\,301\,131,473$$

Paso 3: Calculamos el número de retiros

El valor obtenido con anterioridad vendría siendo a la vez el valor presente de la anualidad 2 la cual está asociada a todos los retiros que va a realizar Lourdes (ese valor se ubica en el mes 180 de la primera gráfica y en el mes 0 de la segunda gráfica). Como se va a retirar desde hoy estaríamos tratando otra vez con una anualidad anticipada. Para poder calcular el número de retiros usamos la fórmula del VP de una anualidad anticipada.

$$2\,301\,131,473 = 20\,500\left[\frac{1-(1+0.8833\%)^{-n}}{0.8833\%}\right]\cdot(1+0.8833\%)$$

$$(1+0.8833\%)^{-n} = 1-\left[\frac{2\,301\,131,473}{25\,000\cdot(1+0.8833\%)}\cdot 0.8833\%\right]$$

$$-n\cdot\log(1+0.8833\%) = \log\left[1-\frac{2\,301\,131,473}{25\,000\cdot(1+0.8833\%)}\cdot 0.8833\%\right]$$

$$n = \frac{-\log\left[1-\frac{2\,301\,131,473}{25\,000\cdot(1+0.8833\%)}\cdot 0.8833\%\right]}{\log(1+0.8833\%)}$$

$$n = 462,3872$$

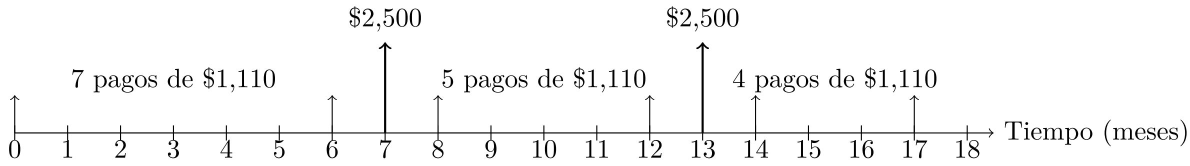
Respuesta: El número de retiros que podrá realizar Lourdes es 462.

Ejercicio 3
Rebeca compra una computadora a crédito mediante 18 pagos mensuales anticipados de \$1 110 cada uno, excepto los pagos número 8 y 14, en los cuales, en lugar de realizar el pago normal de \$1 110, realizará un pago de \$2 500. Si la tasa de interés es del 32% capitalizable cada mes, encuentre el precio de contado de la computadora.
Solución:

Datos:

- Anualidad 1: \$ 1 110 hasta el pago 7
- Anualidad 2: \$ 1 110 del pago 9 al 13
- Anualidad 3: \$ 1 110 del pago 15 al 17
- Tasa nominal anual: 32% capitalizable cada mes
- Pagos: mensuales
- Número de cuotas: Para la anualidad 1 : 7, anualidad 2 : 5 y la anualidad 3 : 4
- Tipo de anualidad: anticipada (las cuotas se hacen al inicio de cada mes)
- Otros pagos : \$ 2 500 en los pagos número 8 y 14

Diagrama de tiempo:



Paso 1: Realizamos la conversión de la tasa

El problema nos da una TNA de 32% capitalizable cada mes y los pagos que se hicieron son mensuales, así que realizaremos la conversión.

$$\text{TNA} \to \text{TNM} = \frac{\text{TNA}}{12} = \frac{32\%}{12} = 2.6666\% = \text{TEM}$$

Paso 2: Calculamos el valor presente de cada anualidad

Debido a que el ejercicio nos pide hallar el precio de contado de una computadora (gráficamente sería en el mes 0), usaremos la fórmula del valor presente para cada anualidad anticipada.

Para la anualidad 1 únicamemnte usaríamos la formula y obtendríamos su valor en el mes 0 pero para las anualidades 2 y 3 obteniamos su valor en el mes 8 y 14 respectivamente por lo que además debemos usar la fórmula del VP de un monto compuesto.

- Anualidad 1:

$$VP = 1110 \cdot \left(\frac{1 - (1 + 2.6666\%)^{-7}}{2.6666\%} \right) \cdot (1 + 2.6666\%) = 7\ 190.0989$$

- Anualidad 2:

$$VP = 1110 \cdot \left(\frac{1 - (1 + 2.6666\%)^{-5}}{2.6666\%} \right) \cdot (1 + 2.6666\%) = 5\ 269,0868$$

Una vez obtenido este valor usamos la fórmula del VP de un monto compuesto, en este caso n=8 ya que el mes de este valor está en el mes 8 y lo queremos llevar al mes 0.

$$VP = \frac{5\ 269,0868}{(1 + 2.6666\%)^{8}} = 4268,7617$$

- Anualidad 3:

$$VP = 1110 \cdot \left(\frac{1 - (1 + 2.6666\%)^{-4}}{2.6666\%} \right) \cdot (1 + 2.6666\%) = 4\ 269,9931$$

Seguimos la misma lógica del calculo del VP de la anualidad 2.

$$VP = \frac{4\ 269,9931}{(1 + 2.6666\%)^{14}} = 2954,0555$$

Paso 3: Calculamos el valor presente de los otros pagos

Además del VP de las 3 anualidades, calcularemos el VP de los otros 2 pagos de $ 2 500, al ser solo pagos aislados usaremos la fórmula del VP de un monto compuesto en vez del VP de una anualidad.

$$VP = \frac{2500}{(1 + 2.6666\%)^{7}} = 2079,3890$$

$$VP = \frac{2500}{(1 + 2.6666\%)^{13}} = 1775,6635$$

Paso 4: Sumamos el valor presente de las anualidades y los otros pagos

Finalmente sumamos los VP calculados con anterioridad (únicamente los VP en el mes 0 de las anualidades y de los 2 pagos) y de esta manera obtenemos el precio de contado de la computadora.

Respuesta: = El precio de contado de la computadora es $18 267,9686