



Modelos de consumo en condiciones de incertidumbre

Benjamin Cano Aviles
Undergraduate Economist
Universidad Nacional
Mayor de San Marcos
benjamin.cano@unmsm.edu.pe

Disponible en: <https://mundosocial-peru.blogspot.com>

Este documento es un apunte académico centrado en los modelos de consumo en condiciones de incertidumbre, cuyo objetivo es explicar la evolución de la teoría del consumo desde una perspectiva microeconómica e intertemporal.

Busca ofrecer una base teórica que abarca desde los fundamentos de Irving Fisher, la Hipótesis del Ciclo de Vida de Modigliani y la Hipótesis de la Renta Permanente de Friedman, hasta la integración de las expectativas racionales propuesta por Robert Hall. A través de herramientas de optimización dinámica, como el Hamiltoniano y la Ecuación de Euler, el texto analiza cómo los agentes buscan la suavización del consumo frente a cambios en la renta y la riqueza total.

Índice:

1. Antecedentes históricos
2. Nociones Previas
3. Fundamentos microeconómicos del consumo: sin incertidumbre
4. Hipótesis del Ciclo de Vida de Modigliani
5. Hipótesis de la Renta Permanente
6. Hipótesis del Ciclo de Vida-Renta Permanente con Expectativas Racionales
7. Conclusiones
8. Bibliografía

1. Antecedentes históricos

La teoría del consumo moderna se aleja de la visión keynesiana de corto plazo para entender el consumo como una decisión intertemporal. Los pilares fundamentales son:

- **Irving Fisher (1930):** Introdujo la idea de que los individuos toman decisiones de consumo en un horizonte de tiempo determinado, balanceando el presente y el futuro.
- **Franco Modigliani (1954):** Desarrolló la *Hipótesis del Ciclo de Vida*, donde el ahorro sirve para trasladar recursos de las etapas productivas a la jubilación.
- **Milton Friedman (1957):** Postuló la *Hipótesis de la Renta Permanente*, argumentando que el consumo depende del flujo de ingresos que un agente espera mantener de forma indefinida.

2. Nociones Previas

Para resolver el problema del consumidor en un contexto dinámico y bajo incertidumbre, se requieren conceptos teóricos y herramientas de optimización matemática:

2.1. Conceptos

- **Riqueza No Humana:** Se refiere al stock de activos físicos y financieros (ahorros, propiedades, acciones) acumulados hasta el momento.
- **Riqueza Humana:** Es el valor actual descontado de todos los ingresos laborales que el individuo espera generar a lo largo de su vida activa.
- **Renta Permanente:** El componente del ingreso que el agente espera que persista en el futuro (ej. un ascenso laboral).
- **Renta Transitoria:** Ganancias o pérdidas accidentales y temporales (ej. ganar la lotería o una reparación imprevista del auto).
- **Mercados Perfectos:** Se asume que el individuo puede prestar y pedir prestado a la misma tasa de interés real, sin límites de crédito.
- **Ausencia de Restricciones de Liquidez:** El supuesto de que siempre puedes gastar hoy basándote en lo que ganarás dentro de 10 años
- **Suavizamiento del Consumo (Consumption Smoothing):** La idea de que los seres humanos prefieren un flujo de consumo estable (comer 3 veces al día siempre) en lugar de banquetes hoy y hambre mañana.
- **Separabilidad Intertemporal:** El supuesto de que el placer que sientes al consumir hoy es independiente de lo que consumiste ayer (no hay formación de hábitos).

2.2. El Hamiltoniano en tiempo continuo

En contextos de certidumbre, el consumidor busca maximizar su utilidad descontada sujeta a una restricción de activos:

$$\max \int_0^T u[c(t)]e^{-\delta t} dt$$

Sujeto a la ecuación de transición de activo:

$$\dot{A}(t) = rA(t) + y(t) - c(t)$$

Donde r es el tipo de interés real y δ es la tasa subjetiva de preferencia temporal.

2.3. La Ecuación de Euler

A partir del Principio del Máximo de Pontryagin, se deriva que en la senda óptima, la tasa de variación del consumo depende de la diferencia entre el interés y el descuento social:

$$r - \delta = - \frac{u''(c)}{u'(c)} \dot{c}(t)$$

Si la utilidad presenta aversión relativa al riesgo constante (ϵ), el consumo crece a una tasa constante $\frac{r-\delta}{\epsilon}$.

3. Fundamentos microeconómicos del consumo: sin incertidumbre

- Se desarrolla bajo un análisis microeconómico mediante el planteamiento de un problema de optimización dinámica la solución determina un plan de consumo óptimo a lo largo de la vida del individuo.
- **La solución del problema:** el plan de consumo óptimo en el periodo actual es proporcional al valor descontado de la riqueza total del individuo o familia.
- **Problema:** el consumidor pretende maximizar el valor descontado de la utilidad U , una función aditivamente separable respecto al tiempo, sujeto a unas restricciones impuestas por la ecuación de transición y la condición inicial y final

$$\max_{\{c_t\}} \int_0^T u[c(t)] e^{-\delta t} dt \quad (1)$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad \dot{A}_t &= rA(t) + y(t) - c(t) && \text{(Ecuación de transición)} \\ A_0 &= \bar{A} && \text{(Condición inicial)} \\ A(T) &= 0 && \text{(Condición final)} \end{aligned}$$

Definición de variables:

$c(t)$: Consumo real de bienes y servicios no duraderos (variable de control).

$A(t)$: Stock de activos en términos reales (variable de estado).

δ : Tasa subjetiva de preferencia temporal.

r : Tipo de interés real (suponemos constante).

$rA(t)$: Renta no humana.

$y(t)$: Renta laboral real (suponemos exógena).

$\bar{A}$: Nivel inicial de los activos.

En este modelo, la condición inicial y final para la **variable de estado** (A) dependen del horizonte temporal finito dentro del cual se resuelve el problema de maximización de utilidad.

Para hallar la senda óptima de consumo, definimos el **Hamiltoniano** del problema como:

$$H[c, A, \lambda] = u[c(t)]e^{-\delta t} + \lambda(t)[rA(t) + y(t) - c(t)] \quad (2)$$

donde $\lambda(t)$ representa el multiplicador de Lagrange o variable co-estado asociada a la restricción de riqueza.

3.1. Condiciones de Primer Orden (CPO)

El principio del máximo de Pontryagin establece que para que el plan de consumo sea óptimo, deben cumplirse las siguientes condiciones:

1. **Optimidad respecto al consumo (Variable de control):**

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = u'[c(t)]e^{-\delta t} - \lambda(t) = 0 \quad (3)$$

Esta condición iguala la utilidad marginal descontada del consumo con el valor sombra de la riqueza.

2. **Ecuación de la variable co-estado:**

$$\frac{\partial H}{\partial A(t)} = r\lambda(t) = -\dot{\lambda}(t) \quad (4)$$

Describe cómo evoluciona el valor de la riqueza a lo largo del tiempo en función de la tasa de interés real.

3. **Ecuación de transición (Variable de estado):**

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda(t)} = rA(t) + y(t) - c(t) = \dot{A}(t) \quad (5)$$

Recupera la restricción presupuestaria dinámica del individuo.

Recuerde que estas ecuaciones permiten derivar la Ecuación de Euler, la cual define la suavización del consumo intertemporal.

A partir de las condiciones de primer orden (CPO) obtenidas mediante el Hamiltoniano, es posible determinar la dinámica temporal del consumo.

Resolviendo para λ en la ecuación (3), tomando la derivada respecto al tiempo y sustituyendo en la ecuación (4), obtenemos la condición de equilibrio intertemporal:

$$u'[c(t)](r - \delta) = -u''[c(t)]\dot{c}(t) \quad (6)$$

Reordenando los términos, llegamos a la expresión fundamental para la tasa de variación de la utilidad marginal:

$$r - \delta = -\frac{u''}{u'}[\dot{c}(t)] \quad (7)$$

La ecuación (7) establece que, a lo largo de la **senda óptima del consumo**, la tasa a la que decrece la utilidad marginal debe ser exactamente igual a la diferencia entre el tipo de interés real (r) y la tasa subjetiva de preferencia temporal (δ).

3.2. Caso de Elasticidad de Utilidad Marginal Constante

Si la función de utilidad muestra una **elasticidad de la utilidad marginal respecto al consumo constante e igual a ε** , la dinámica se simplifica a:

$$\dot{c}(t) = \frac{r - \delta}{\varepsilon} c(t) \quad (8)$$

donde $\varepsilon = -(u''/u')c(t)$.

Esta ecuación dinámica describe la senda temporal del consumo y depende de r , δ y las características de la función de utilidad. Bajo una **función de utilidad con aversión relativa al riesgo constante (CRRA)**

$$u(c) = \frac{c^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

- **Crecimiento constante:** El consumo crece a lo largo de la senda óptima a una tasa constante siempre que $r > \delta$.
- **Independencia de la renta actual:** Según *Dornbusch* y los fundamentos presentados, la tasa de variación del consumo ($\dot{c}_t$) es independiente del nivel de renta corriente (y).

- **Restricción Presupuestaria Intertemporal (RPI):** Aunque la tasa de crecimiento sea independiente, los niveles absolutos de consumo para distintos periodos dependen de las **condiciones inicial y final del nivel de activos** y de la evolución esperada de la renta.

La solución general no definida para la ecuación (8) es:

$$c_t = K e^{\frac{(r-\delta)t}{\varepsilon}} \quad (9)$$

Para determinar el valor de K , integramos la RPI y se utilizan las condiciones inicial y final[cite: 67]. El valor descontado de la **riqueza humana y no humana**, W , está dado por:

$$\int_0^T c(t) e^{-rt} dt = \bar{A} + \int_0^T y(t) e^{-rt} dt = W \quad (10)$$

Usando la expresión (9) se puede resolver para K , cuando W se valora en el instante cero:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T c(t) e^{-rt} dt = K \int_0^T e^{\frac{(r-\delta)t}{\varepsilon}} e^{-rt} dt \\ &= K \int_0^T e^{\phi t} dt \quad ; \quad \text{donde } \phi = \frac{1}{\varepsilon} [r(1-\varepsilon) - \delta] \end{aligned}$$

$$W = \frac{K}{\phi} [e^{\phi T}]_0^T = \frac{K}{\phi} (e^{\phi T} - 1)$$

$$K = \frac{\phi W}{e^{\phi T} - 1}$$

Esta ecuación describe la senda temporal del consumo óptimo entre 0 y T , dado su riqueza (W)

$$c_t = K e^{\frac{(r-\delta)t}{\varepsilon}}$$

La senda de consumo en cualquier momento específico del tiempo no depende de la renta de dicho momento, sino de los **recursos totales** (valor de los activos más el valor descontado de la **renta laboral**). Así, dada la definición de W , se comprueba que la **hipótesis del ciclo de vida implica una relación de proporcionalidad entre la senda del consumo y la de la renta**.

No podemos hablar de la dependencia del consumo de un periodo respecto de la renta del mismo periodo.

Podemos transformar el resultado para c , para obtener una ecuación que indique el consumo en un periodo determinado, concretamente, en t , como una función de los activos acumulados hasta el comienzo de t más el **valor descontado de las rentas que se esperan obtener entre t y T** .

Así se redefine las variables, valorando la riqueza ya no en cero (0) sino en t .

Así, la demanda de consumo para el periodo t vendrá dada por:

$$c_t^T = \frac{\phi}{e^{\phi t} [e^{\phi(T-t)} - 1]} W_t^T = K_t^T W_t^T \quad ; \quad 0 < K_t^T < 1 \quad (11)$$

K_t^T es un **coeficiente de proporcionalidad** que depende de factores como tasa de preferencia temporal, tasa de interés real.

Asimismo, la **riqueza humana y no humana** (W) se define como:

$$W_t^T = A_t + \int_t^T y(\tau) e^{-r\tau} d\tau$$

A_t son los activos acumulados hasta el periodo t

Así, el **consumo** (c_t^T) se puede formular en términos de **activos acumulados hasta ese momento** (A_t), más el **valor descontado de las rentas** que se esperan generar hasta T :

$$\int_t^T y(\tau) e^{-r\tau} d\tau$$

Así, una variación en el valor actualizado de la riqueza del individuo, dada sus preferencias y el tipo de interés real, llevará a una variación del consumo del periodo en ese mismo sentido

$$c_t^T = \frac{\phi}{e^{\phi t} [e^{\phi(T-t)} - 1]} W_t^T = K_t^T W_t^T \quad ; \quad 0 < K_t^T < 1$$

4. La Hipótesis del Ciclo de Vida

Los autores toman como punto inicial el **análisis microeconómico de la maximización de la utilidad del agente representativo** en un contexto **intertemporal** sujeto a la restricción presupuestaria relevante.

Si la función de utilidad es homotética (no proporcional pero ordinal) podemos expresar (términos discretos) el consumo del individuo en el periodo t de la siguiente manera:

$$c_t^T = K_t^T W_t^T \quad (12)$$

- c_t^T es el consumo de un individuo en t cuya muerte ocurrirá en $t = T$.
- K_t^T es función de la tasa de preferencia temporal (δ), la tasa de interés real (r), gustos (ϵ) y años de vida que le quedan al individuo ($T - t$). Así, K_t^T **no depende de la renta**.

La ecuación (12) nos dice que el consumo del agente es proporcional al valor de la riqueza W_t^T .

La riqueza del individuo se expresa de la siguiente forma:

$$W_t^T = A_{t-1}^T + y_t^T + \sum_{j=t+1}^T \frac{y_j^{Te}}{(1+r)^{j-t}}$$

siendo:

- A_{t-1}^T los activos acumulados al comienzo del período t , o lo es lo mismo, al final del período $t - 1$.
- y_t^T la renta laboral disponible en el período t .
- $\sum_{j=t+1}^T \frac{y_j^{Te}}{(1+r)^{j-t}}$ el valor actual descontado de las rentas futuras esperadas.

Todos los valores están en términos reales.

A partir de esta definición de riqueza, **Ando y Modigliani** elaboran la teoría de ciclo de vida.

Para operativizar el valor actual de las rentas futuras esperadas, $\sum_{j=t+1}^T \frac{y_j^{Te}}{(1+r)^{j-t}}$, se postula una variable llamada **renta esperada media**:

$$\hat{y}_{t+1}^{Te} = \frac{1}{T-t} \sum_{j=t+1}^T \left(\frac{y_j^{Te}}{(1+r)^{j-t}} \right)$$

Como la renta esperada ($\hat{y}_{t+1}^{Te}$) es una **variable no observable**, se aproxima mediante una relación más sencilla:

$$\hat{y}_{t+1}^{Te} = \beta y_t^T$$

Por lo que la **función consumo del agente representativo** en el periodo t , si su horizonte vital es T , es:

$$\begin{aligned} c_t^T &= K_t^T W_t^T = K_t^T (A_{t-1}^T + y_t^T + (T-t)\hat{y}_{t+1}^{Te}) \\ &= K_t^T (A_{t-1}^T + (1+\beta(T-t))y_t^T) \quad \textbf{Función consumo individual} \end{aligned}$$

- No se limita a consumir en cada periodo la renta corriente de ese periodo
- Puede **endeudarse**-consumir por encima de su renta

- **Ahorra** en periodos de alta renta
- **Desahorra** en su jubilación

Por tanto, el ahorro es el medio de obtener un plan de consumo óptimo, trasladando la renta en el tiempo. La hipótesis del ciclo de vida explica la tendencia al descenso de la **propensión media al consumo (PMC)** a medida que aumenta la renta:

- Si se ordena a las familias por estratos de renta.
- Los estratos de renta baja contienen familias en ambos extremos de la distribución por edades con alta PMC.
- En estratos altos hay más familias de edad media con PMC más baja.

Por tanto, los estudios de corte transversal deberían mostrar que la PMC disminuye cuando la renta aumenta.

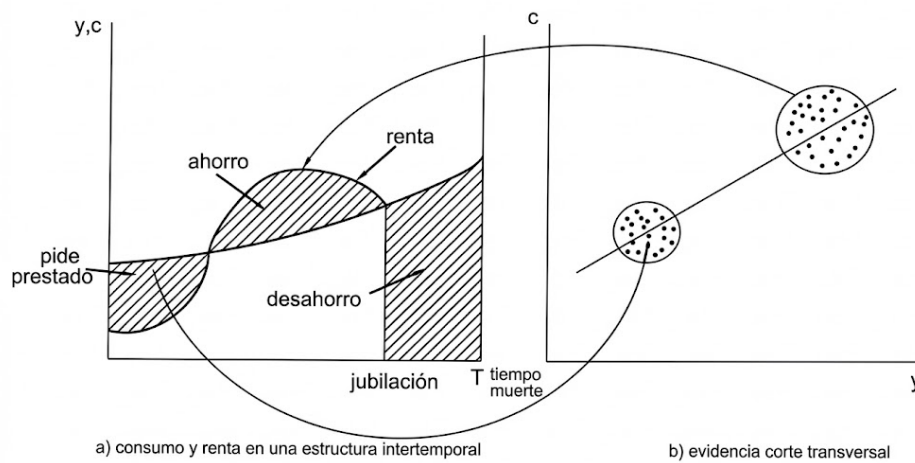


Figure 1: Consumo y renta en la Hipótesis del Ciclo de Vida.

Nota. Adaptado de *Macroeconomía Avanzada I* (p. 126), por A. Argandoña, C. Gámez y F. Mochón, 1996, McGraw-Hill.

4.1. Función de consumo agregada

- Bajo ciertos supuestos, se puede pasar del análisis microeconómico del agente representativo a la agregación por grupos de edades, y luego, para todos los consumidores de la economía:
 - El término K_t^T es diferente entre agentes económicos.
 - Así, para agregar es necesario introducir **supuestos de estabilidad**, relativos al comportamiento de los individuos ante el consumo de los grupos de edades de la población, ante la distribución de la renta y riqueza.
 - Por tanto, si suponemos que este comportamiento es invariante en el tiempo, se puede agregar y obtener la siguiente función consumo:

$$c_t = \alpha_1 y_t + \alpha_2 y_t^e + \alpha_3 A_{t-1}$$

- y_t : renta agregada
- y_t^e : renta esperada agregada
- A_{t-1} : activos acumulados

Si suponemos como Ando y Modigliani que, $y_t^e = \beta y_t$ entonces:

$$c_t = (\alpha_1 + \alpha_2\beta)y_t + \alpha_3 A_{t-1}$$

La **propensión media al consumo** sería:

$$\frac{c_t}{y_t} = (\alpha_1 + \alpha_2\beta) + \frac{\alpha_3 A_{t-1}}{y_t} = a + b \frac{A_{t-1}}{y_t}$$

A largo plazo se observa que $\frac{A_{t-1}}{y_t}$ es creciente

$\alpha_1 + \alpha_2\beta$ es constante

$\frac{A_{t-1}}{y_t}$ responde a cambios en el corto plazo: A_{t-1} mide los ahorros acumulados en el pasado, **varia muy poco**, así las variaciones de la renta real (y_t) domina a la de los activos (A_{t-1}) → economía transita a lo largo de la función consumo c_c

- Si A_{t-1} no se altera en el corto plazo por los movimientos cíclico de la economía, los cambios en $\frac{A_{t-1}}{y_t}$ modifican la propensión media a consumir y ahorrar

$$\frac{c_t}{y_t} = (\alpha_1 + \alpha_2\beta) + \frac{\alpha_3 A_{t-1}}{y_t} = a + b \frac{A_{t-1}}{y_t}$$

- **En recesión:** cuando cae la renta, $\frac{A_{t-1}}{y_t}$ aumenta, $\uparrow \frac{c_t}{y_t}$
- **En expansión:** cuando aumenta la renta, $\frac{A_{t-1}}{y_t}$ baja, $\downarrow \frac{c_t}{y_t}$

Con el paso del tiempo la línea c_c o consumo de corto plazo, se va desplazando a medida que aumenta A_{t-1} : c'_c

Así, existen diferentes funciones de consumo a corto plazo.

A largo plazo, el crecimiento de la economía y la acumulación de activos hacen que el mejor ajuste de los datos consumo-renta se logre con funciones tipo c_l .

Así, las propensiones medias a consumir y ahorrar permanecen constantes en ese horizonte temporal.

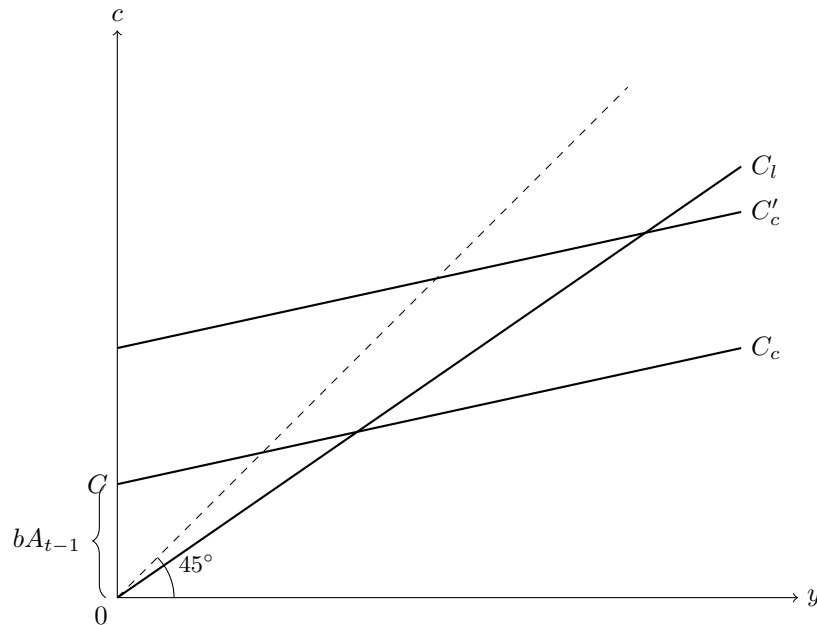


Figure 2: La Hipótesis del Ciclo de Vida.

Nota. Adaptado de *Macroeconomía Avanzada I* (p. 128), por A. Argandoña, C. Gámez y F. Mochón, 1996, McGraw-Hill.

5. Hipótesis de la Renta Permanente

Introducción

- En el modelo de Friedman (1957) destaca el concepto de **redistribución intertemporal del consumo**
- ¿Cuál es el nivel de consumo que un agente podría mantener permanentemente en el tiempo, de forma indefinida, sin que se altere la riqueza humana y no humana del individuo?
- Asume que el individuo o familia se comporta como si tuviera vida infinita y que el principal determinante del consumo es el ingreso de largo plazo
- Para responder, se plantea el concepto de **renta permanente**: flujo de renta que se puede mantener permanentemente manteniendo intacta la riqueza de la que provienen.
- La renta permanente se puede expresar así:

$$y_t^P = rW_t$$

y_t^P : renta permanente en el periodo t

W_t : riqueza del individuo a lo largo de su vida = a los activos iniciales más los valores descontados de las rentas futuras

r: es el tipo de interés real (algún tipo de interés de largo plazo)

- Así, la renta permanente se debe entender como un flujo perpetuo de renta

En base a dicho flujo, Friedman postula la existencia de un **consumo permanente**, c^P , proporcional a la renta permanente:

$$c^P = ky^P$$

k: coeficiente de proporcionalidad que depende de factores tales como el tipo de interés, los gustos, y elementos demográficos (ejemplo: edad).

Sin embargo, el consumo efectivo corriente (c_t) incluye, junto al permanente (c_t^P), un consumo transitorio (c_t^T)

consumo transitorio (c_t^T): compras extraordinarias, gastos de enfermedad, etc.

$$c_t = c_t^P + c_t^T$$

A nivel **microeconómico**, los **shocks transitorios de consumo** pueden ser importantes, pero a **nivel agregado, es muy probable que se cancelen**: algunos individuos tendrán **shocks negativos** y otros **positivos** (este argumento permite ignorarlos)

Sin embargo, Friedman supone que los shocks transitorios afectan no solo al consumo (c_t) sino también a la renta

Así, el ingreso corriente es:

$$y_t = y_t^P + y_t^T$$

Las rentas transitorias positivas y negativas de los agentes económicos no se cancelan en la agregación total.

Por tanto, habrá alguna parte de la renta agregada que puede ser considerada de esta naturaleza.

Friedman postula la hipótesis que el consumo y la renta transitoria no están correlacionados entre si y que tampoco están correlacionados los componentes transitorios y permanentes del consumo ni el de la renta.

Sea μ el coeficiente de correlación, estas hipótesis se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\mu_{c_t^T, y_t^T} = \mu_{c_t^T, c_t^P} = \mu_{y_t^T, y_t^P} = 0$$

Por tanto, usando datos de corte transversal, la línea que parte del origen relaciona el consumo permanente (c^P) con la renta permanente (y^P)

Supongamos un agente representativo cuya renta permanente fuese

Asimismo, si el consumo e ingreso transitorio fuesen nulos: $y^T = c^T = 0$, corresponde al punto D

Suponga que el agente representativo tiene un **componente transitorio de renta positivo**, de esta forma su renta corriente es y^A

La ecuación $c_t = c_t^P + c_t^T$ indica el que el consumo es sensible a la renta transitoria.

El segmento AA' refleja **la reacción del consumo a los shocks transitorios de la renta**, si bien el consumo depende principalmente del nivel de renta permanente.

El incremento del consumo es mucho menor que el incremento transitorio en la renta ($y^A - y^P$)

Si estuviéramos en el punto B , con un shock de renta transitorio negativo y con una renta medida (y^B)

La disminución de la renta no implicaría una disminución del consumo en igual cuantía al depender el consumo principalmente de la renta permanente

La ecuación $c_t = c_t^P + c_t^T$ indica el que el consumo es sensible a la renta transitoria.

El segmento AA' refleja la reacción del consumo a los shocks transitorios de la renta, si bien el consumo depende principalmente del nivel de renta permanente.

En el largo plazo, en promedio, el $c^P = y^P$ y la c/y es constante $= k$

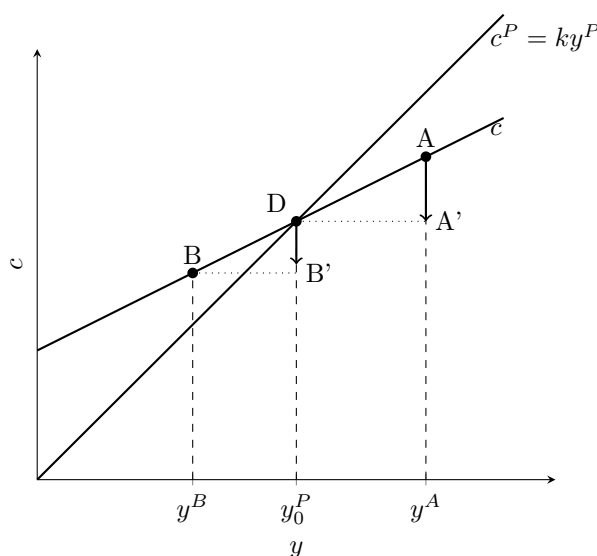


Figure 3: Hipótesis del Ingreso Permanente.

Nota. Adaptado de *Macroeconomía Avanzada I* (p. 130), por A. Argandoña, C. Gámez y F. Mochón, 1996, McGraw-Hill.

Implicancia

El nivel de consumo se determina básicamente por el nivel de renta permanente

En las series históricas el **componente transitorio de la renta** tendera a cancelarse en el **largo plazo** de modo q se observará una **relación de proporcionalidad entre c^P , y^P y entre c e y** , pero en las fluctuaciones cíclicas a corto plazo el componente transitorio será positivo en las fases de auge y negativo en las recesiones

Esto implica que en el auge el componente transitorio positivo de renta no se consumirá totalmente, de modo que el ratio ahorro/renta subirá.

Mientras que en épocas de recesiones para mantener el consumo cercano al consistente con la renta permanente, el ratio ahorro/renta disminuirá

Notas:

Ambas teorías se desarrollan describen las sendas del consumo y de la renta en un contexto sin incertidumbre

Hipótesis básica de ambas teorías: el consumidor se comporta forward-looking (“mirando el futuro”) y trata de moderar/suavizar su senda de consumo a lo largo de toda la vida

Énfasis de ambas teorías centradas en el futuro:

- Hipótesis del ciclo vital: sobre rentas futuras
- Hipótesis de ingreso permanente: nivel de consumo que puede mantenerse indefinidamente en el futuro

Sin embargo, cuando se deseaba proceder en las estimaciones (60s y 70s) se realizaban regresiones con funciones del siguiente tipo:

$$c_t = \alpha + \beta_0 y_t + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots + \beta_n y_{t-n} + \gamma_1 c_{t-1} + \gamma_2 c_{t-2} + \dots$$

- Persistencia de hábitos en el consumidor
- Backward-looking
- Retardos distribuidos de la renta con impuestos: los efectos de los impuestos afectarían al consumo con el paso del tiempo o retardados. Esto contradice ambas teorías pues el ajuste sobre el consumo debería ser instantáneo

6. Modelos con incertidumbre: Hipótesis del ciclo de vida-renta permanente con expectativas racionales

Contexto **estocástico** o aleatorio en el cual usamos la **hipótesis de expectativas racionales** sobre los valores esperados de las **variables relevantes** de ambos modelos

Robert E. Hall Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence. Journal of Political Economy, Dec., 1978, Vol. 86, No. 6 (Dec., 1978), pp. 971-987 Published by: The University of Chicago Press.

Hall parte de una estructura teórica de maximización intertemporal de la función de utilidad esperada del consumidor, muestra que **el consumo actual se explica solo en función de su propio valor retardado y de unos términos aleatorios** que reflejan las innovaciones en el conjunto de información de los consumidores en el periodo actual

Así, la hipótesis del ciclo vital con ER es que a lo largo de la senda de optimalidad, el consumo agregado se desenvuelve según un proceso autoregresivo de primer orden AR(1) o paseo aleatorio (Random Walk) Problema de optimización dinámica en tiempo discreto

Según Hall , el consumidor quiere maximizar el valor descontado de la utilidad esperada sobre su horizonte de vida:

$$\begin{aligned} \max_{(c_s)} \quad & E_t \left\{ \sum_{s=t}^T \frac{u(c_s)}{(1+\delta)^{s-t}} \right\} \\ \text{s.a.} \quad & A_s = (1+r)A_{s-1} + y_s - c_s \quad \forall s \geq t \\ & A_0 = \bar{A} \\ & A_T = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

E_t : es la esperanza matemática condicionada a toda la información disponible en t y por tanto esta expresión

$$E_t \left\{ \sum_{s=t}^T \frac{u(c_s)}{(1+\delta)^{s-t}} \right\} \quad (2.2)$$

es la esperanza matemática condicional del valor descontado de la utilidad del consumidor, que se supone es intertemporalmente separable (función de utilidad es la misma periodo a periodo)

y_t : es la renta, una **variable estocástica** y única fuente de incertidumbre

En cada, el consumidor elige un consumo c_t de modo que maximice la utilidad esperada teniendo en consideración toda la información disponible

Bajo incertidumbre las realizaciones del estado de la economía en cada periodo conlleva información que afecta las predicciones de los valores futuros de la renta, y por lo tanto a la senda de consumo

Así, el problema con incertidumbre se soluciona en cada periodo, partiendo de las condiciones iniciales
Sustituyendo la restricción en la función objetivo: reformular el problema en términos de los activos

$$\max \quad E_t \left\{ \sum_{s=t}^T \frac{u[(1+r)A_{s-1} + y_s - A_s]}{(1+\delta)^{s-t}} \right\} \quad (2.3)$$

La condición necesaria para maximizar el problema, se reduce a la **ecuación de Euler**.

Así, en general hay un conjunto de condiciones de primer orden para todo $s = t, t+1, \dots, T$

Para $s = t$:

$$u'(c_t) = \frac{1+r}{1+\delta} E_t \{ u'(c_{t+1}) \} \quad (2.4)$$

- Función objetivo

$$E_t \left\{ \sum_{s=t}^T \frac{u[(1+r)A_{s-1} + y_s - A_s]}{(1+\delta)^{s-t}} \right\}$$

- Esta función cumple la sigte. ecuación recursiva, llamada **ecuación de Bellman**

$$E_t \left\{ \frac{u[(1+r)A_{s-1} + y_s - A_s]}{(1+\delta)^{s-t}} + \frac{u[(1+r)A_s + y_{s+1} - A_{s+1}]}{(1+\delta)^{s-t+1}} \right\}$$

- El agente económico repite su decisión en cada periodo de tiempo, maximizando la ecuación anterior: el valor descontado de la utilidad del consumo en un periodo y el correspondiente valor descontado en el periodo siguiente

- Las CPO requiere que

$$E_t \left\{ \frac{1}{(1+\delta)^{s-t}} \frac{\partial u[(1+r)A_{s-1} + y_s - A_s]}{\partial A_s} + \frac{1}{(1+\delta)^{s-t+1}} \frac{\partial u[(1+r)A_s + y_{s+1} - A_{s+1}]}{\partial A_s} \right\} = 0$$

$$u'(c_t) = \frac{1+r}{1+\delta} E_t \{ u'(c_{t+1}) \}$$

Indica que el **valor esperado de la utilidad marginal de mañana** será proporcional a la **utilidad marginal conocida de hoy**.

Renunciar a la utilidad de una unidad de consumo en t , permite obtener $(1+r)$ unidades de consumo en $t+1$ cuya utilidad marginal esperada, descontada a la tasa δ , será igual a la utilidad marginal en t .

Por la hipótesis de ER, la **realización de la utilidad marginal del consumo en el periodo $t+1$** será:

$$u'(c_{t+1}) = E_t[u'(c_{t+1}) | I_t] + \varepsilon_{t+1} \quad (2.5)$$

I_t : es el conjunto de información relevante que el consumidor posee en t para prever sus rentas futuras de modo que $I_t \supset I_{t-1} \supset I_{t-2} \dots$

ε_{t+1} es un término de error que cumple esta propiedad: $E_t[\varepsilon_{t+1} | I_t] = 0$

$$u'(c_t) = \frac{1+r}{1+\delta} E_t \{ u'(c_{t+1}) \}$$

Indica que el **valor esperado de la utilidad marginal de mañana** será proporcional a la **utilidad marginal conocida de hoy**.

Renunciar a la utilidad de una unidad de consumo en t , permite obtener $(1+r)$ unidades de consumo en $t+1$ cuya utilidad marginal esperada, descontada a la tasa δ , será igual a la utilidad marginal en t .

Por la hipótesis de ER, la **realización de la utilidad marginal del consumo en el periodo $t+1$** será:

$$u'(c_{t+1}) = E_t[u'(c_{t+1}) | I_t] + \varepsilon_{t+1} \quad (2.5)$$

I_t : es el conjunto de información relevante que el consumidor posee en t para prever sus rentas futuras de modo que $I_t \supset I_{t-1} \supset I_{t-2} \dots$

ε_{t+1} es un término de error que cumple esta propiedad: $E_t[\varepsilon_{t+1} | I_t] = 0$

La HER implica que la realización del consumo en el periodo t será:

$$c_t = E_t[c_t] + \varepsilon_t$$

Para $t+1$

$$E_t[u'(c_{t+1})] = a - c_{t+1} - \varepsilon_{t+1}$$

Esos valores para $E()$ y u' introducidas en la ecuación de Euler:

$$c_{t+1} = \alpha + \beta c_t + \varepsilon_{t+1} \quad \alpha = \frac{a(r-\delta)}{1+r} \quad \beta = \frac{1+\delta}{1+r}$$

AR(1) si $\delta < r$ o paseo aleatorio si $\delta = r$,

$$\Delta c_{t+1} = \varepsilon_{t+1}$$

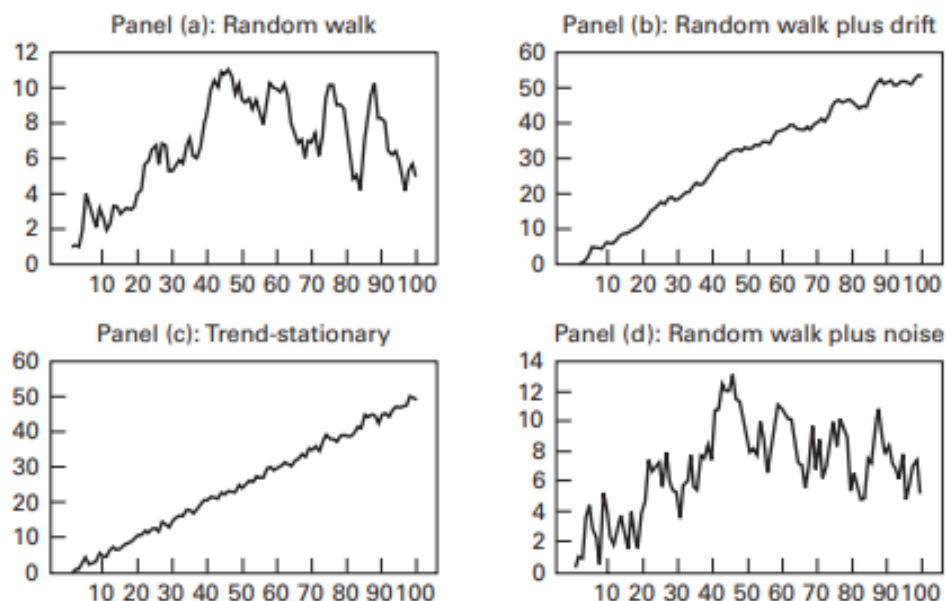


Figure 4: Hipótesis del ciclo de vida-renta permanente con expectativas racionales.

Nota. Adaptado de *Applied Econometric Time Series* (p. 186), por W. Enders, 1996, Wiley.

Implicancias

1. Para predecir el consumo en el periodo $t + 1$, la única información disponible útil es el consumo en t . Así, en un modelo de previsión macroeconómica de corto plazo, el consumo debería ser tratado como una variable **exógena**
2. Los valores retardados de cualquier otra variable que, en principio, podrían ser relevantes para predecir el consumo en $t + 1$ como $(c_{t-1}, c_{t-2}, \dots; y_{t-1}, y_{t-2}, \dots; r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$ no tienen valor explicativo adicional, una vez q el consumo retardado un periodo se tiene en consideración
3. El término de error ε_{t+1} , recoge el consumo no planeado en el periodo t y es resultado de adquirir nueva información acerca de las rentas futuras, información no disponible en el periodo t cuando se determinó el plan de consumo para $t + 1$.
4. Desde la óptica de la efectividad de la política económica, sólo los cambios no esperados en la misma influirán sobre el consumo futuro; los cambios esperados ya están incorporados en las decisiones de consumo actual. Por tanto, la viabilidad de las políticas anticíclicas anticipadas queda así en entredicho.
5. Así, esta es una propuesta de ineffectividad de las políticas anticíclicas, anticipadas y percibidas correctamente.

6.1. El papel de la renta corriente y ajuste de consumo

- De lo anterior se concluye que la renta actual o corriente no influiría en el consumo actual
- ¿Qué rol juega el ingreso actual, anticipado o no anticipado, en el nivel de consumo actual de acuerdo al modelo de ciclo de vida-renta permanente con ER?
- Vamos a suponer que, la solución general de la ecuación en diferencias correspondiente a las CPO fuese:

$$c_t = K\{E_t W_t\}$$

Donde K es una constante, y $E_t W_t = A_t + \sum_{s=t}^T \frac{E_t y_s}{(1+r)^{s-t}}$

Tomando expectativa en $t - 1$ del consumo en t , tenemos lo siguiente.

$$E_{t-1}c_t = E_{t-1}[K\{E_tW_t\}] = K[E_{t-1}W_t] \quad \text{Dado que} \quad [E_{t-1}(E_tW_t)] = E_{t-1}W_t$$

También sabemos que el término de error:

$$\varepsilon_t = c_t - E_{t-1}c_t = K \left(\underbrace{\overbrace{E_tW_t}^{\text{Componente no anticipado}} - \overbrace{E_{t-1}W_t}^{\text{Componente anticipado}}}_{\text{describe la \textbf{revisión de las expectativas} acerca de W cuando se recibe información entre t-1 y t}} \right)$$

Si los agentes son racionales, en el periodo $t - 1$, utilizarán toda la información disponible en ese periodo para calcular $E_{t-1}W_t$

La expectativa en el periodo t de W_t , E_tW_t , incluirá también la información que los agentes no habían recibido en $t - 1$: recogerá **sorpresas o innovaciones** en la renta.

Por tanto, es el componente **no anticipado de W_t** (E_tW_t) el que llevará a una revisión de las expectativas de la riqueza total de toda la vida y que puede cambiar el **consumo planeado** del ciclo vital. Mientras que el **componente anticipado** ($E_{t-1}W_t$) es conocido en $t - 1$ y está incorporado en el consumo de ese periodo.

ε_t recoge toda la nueva información acerca de las variables observables que influyen sobre el consumo. Así, podemos expresar el consumo de Hall realizado en t como la suma del consumo planeado en $t - 1$ y el no planeado, en la forma siguiente: función de consumo “sorpresa”

$$c_t = \alpha + \beta c_{t-1} + K[E_tW_t - E_{t-1}W_t]$$

Las revisiones de las expectativas de W estarán correlacionadas con la nueva información de la renta y otras variables que el consumidor tenga en consideración (expectativas de los salarios, variación de impuestos permanentes, variaciones de tasas de interés, etc.)

Supongamos que las **revisiones de W se realizan solo sobre la renta no anticipada** y el proceso estocástico ad hoc que sigue la **renta es un paseo aleatorio**

$$y_t = y_{t-1} + v_t$$

Donde v_t es una variable aleatoria de media cero y varianza constante.

De modo que, la revisión de la evaluación de las posibilidades de riqueza futura sería: $E_tW_t - E_{t-1}W_t = (y_t - E_{t-1}y_t)$

Sin embargo, si la renta sigue un paseo aleatorio $E_{t-1}y_t = y_{t-1}$ tal que

$$K(E_tW_t - E_{t-1}W_t) = K(y_t - y_{t-1})$$

Reemplazando en $c_t = \alpha + \beta c_{t-1} + K[E_tW_t - E_{t-1}W_t]$

$$c_t = \alpha + \beta c_{t-1} + K(y_t - y_{t-1})$$

La función consumo es una relación entre el consumo actual (c_t) y el consumo retardado un periodo (c_{t-1}) más un retardo distribuido de la renta (y_t, y_{t-1}): esto es igual a la especificación general de la función consumo tradicional en contexto no estocástico $c_t = f(c_{t-1}, y_t, y_{t-1}, \dots)$

Algunas diferencias fundamentales entre la función consumo tradicional y la función consumo con un paseo aleatorio:

El término $K(y_t - y_{t-1})$ es la revisión en la renta futura bajo el supuesto de que la renta actual sigue un paseo aleatorio, y dicha revisión afectará al consumo del periodo t

La renta anticipada en $t - 1$, $E_{t-1}y_t$, no ejerce ningún efecto sobre el nivel de consumo en el periodo t , una vez tenido en cuenta el nivel de consumo en $t - 1$. Solo ejercen efectos las revisiones en la renta futura producidas entre $t - 1$ y t , las cuales afectan la riqueza futura

Los parámetros del proceso que genera la renta y los de la función consumo están sujetos a restricciones: si el proceso estocástico q genera la renta es un paseo aleatorio, el coeficiente de la renta actual debe ser igual a la renta retardada pero con signo opuesto

Evidencia empírica del modelo de consumo de paseo aleatorio

La evidencia no avala totalmente la teoría. Se muestra dos hechos:

1. los cambios en el consumo son mayores que los cambios contemporáneos y pasados de la renta, el consumo no se comporta como un paseo aleatorio: exceso de sensibilidad del consumo a la renta (restricciones de liquidez crédito)
2. Los cambios en el consumo reaccionan muy poco a las sorpresas o innovaciones en la renta: exceso de suavidad

Notas

Evidencia Empírica: Las Anomalías de Flavin (1981) y Deaton (1992) A pesar de la elegancia teórica del modelo de paseo aleatorio de Hall, la evidencia empírica ha detectado dos fallas sistemáticas: el exceso de sensibilidad y el exceso de suavidad. Estos hallazgos no invalidan la Hipótesis del Ciclo Vital-Renta Permanente (HCV-HRP), sino que sugieren que la "hipótesis conjunta" de mercados perfectos, ausencia de hábitos y expectativas racionales no se cumple simultáneamente en la realidad. ¿Implica esto un rechazo a la HCV-HRP con ER? No

necesariamente. El rechazo no es hacia la idea de que los agentes miran hacia el futuro (forward-looking), sino hacia la hipótesis conjunta que sostiene el modelo. Para que el consumo sea un paseo aleatorio puro, deben cumplirse cuatro condiciones estrictas: Expectativas racionales. Consumo determinado por la riqueza total. Mercados de capitales perfectos (posibilidad de prestar y pedir prestado sin restricciones). Ausencia de formación de hábitos. Los hallazgos de Flavin y Deaton indican que al menos uno de estos pilares (usualmente el de mercados perfectos o ausencia de hábitos) falla en la economía real.

El supuesto de las contrastaciones empíricas de la hipótesis nula consiste en verificar una **hipótesis conjunta** de que:

1. Las expectativas de los consumidores se forman racionalmente
2. El consumo deseado se determina en función a la riqueza total
3. Los mercados de capitales son perfectos: los consumidores pueden prestar y pedir y prestado contra sus rentas futuras al tipo de cambio dado
4. El consumo no viene determinado por la formación de hábitos.

Exceso de sensibilidad del consumo respecto a la renta actual puede provenir del hecho de que las **imperfecciones en los mercados de capitales**, sea por **restricciones al crédito o liquidez**, impiden a los consumidores seguir su senda de consumo óptima: luego no es inconsistente con la hipótesis de ciclo de vida con ER que el consumo actual no dependa de la renta actual, sino el incumplimiento del tercer componente de la hipótesis conjunta debido a que en la economía real existe restricciones de liquidez

Exceso de sensibilidad y suavidad: existencia de hábitos de consumo y la no separabilidad de las preferencias entre consumo y ocio y la importancia del ahorro por motivo precaución.

7. Conclusiones

En conclusión, el estudio de los modelos de consumo bajo incertidumbre constituye uno de los pilares fundamentales de la macroeconomía moderna, al desplazar la visión de corto plazo hacia un marco analítico de decisión intertemporal. A través de la integración de la Hipótesis del Ciclo de Vida y la Hipótesis de la Renta Permanente, se ofrece una base sólida para comprender cómo los agentes buscan la suavización del consumo basándose en su riqueza total. La formulación matemática, mediante el uso del Hamiltoniano y la Ecuación de Euler, permite determinar sendas óptimas de gasto donde la tasa de interés y la preferencia temporal dictan la dinámica del bienestar a lo largo de la vida.

La incorporación de las expectativas racionales por parte de Robert Hall transforma esta perspectiva al proponer que el consumo sigue un "paseo aleatorio", donde solo las innovaciones o sorpresas en la renta pueden alterar el plan de consumo planeado. No obstante, la revisión de la evidencia empírica —específicamente el exceso de sensibilidad y el exceso de suavidad— demuestra que el cumplimiento de los supuestos teóricos se ve desafiado por la realidad de los mercados. Factores como las restricciones de liquidez, la formación de hábitos y las imperfecciones en el mercado de capitales subrayan la importancia de evaluar críticamente el modelo antes de validar la ineffectividad de las políticas anticíclicas.

En conjunto, este análisis no solo representa una herramienta teórica, sino un enfoque metodológico que fomenta el razonamiento lógico sobre la riqueza humana y no humana. Su comprensión permite identificar patrones clave en el comportamiento de los hogares y sustentar el diseño de políticas económicas basadas en una interpretación rigurosa de las expectativas futuras. De este modo, el estudio de estos modelos se consolida como una pieza esencial para cualquier economista interesado en la dinámica del crecimiento y la estabilidad macroeconómica.

8. Bibliografía

- Adda, J., & Cooper, R. (2003). *Dynamic economics: Quantitative methods and applications*. MIT Press.
- Ando, A., & Modigliani, F. (1963). The "Life Cycle" Hypothesis of Saving. *The American Economic Review*.
- Argandoña, A., Gámez, C. y Mochón, F. (1996). *Macroeconomía Avanzada I*. McGraw Hill.
- Deaton, A. (1992). *Understanding consumption*. Oxford University Press.
- Enders, W. (2015). *Applied econometric time series* (4.^a ed.). Wiley.
- Flavin, M. A. (1981). The adjustment of consumption to changing
- Hall, R. E. (1978). Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis. *Journal of Political Economy*.
- Jiménez, F. (2006). *Macroeconomía: Enfoques y modelos* (Tomo I). Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.