



Resolución Matemática Financiera

Inversiones, valoración de bonos, sistemas de amortización y anualidades

Ciclo 2025-II, dictado por Mg. Marlene Barrera A.

Mendoza Cruz Katya Isabel ¹
Peredo Picón Joseph Sebastian²

¹ Undergraduate Economist, Universidad Nacional Mayor de San Marcos
katyaisabel.mendoza@unmsm.edu.pe

² Undergraduate Economist, Universidad Santo Toribio de Mogrovejo
sebastianperedo19@gmail.com

Disponible en: <https://mundo-social.com>

El presente documento constituye una guía de resolución del **exámen parcial** y **exámen final** de Matemática Financiera, correspondientes al ciclo académico 2025-II de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNMSM, bajo la dirección de la Mg. Marlene Barrera. Se incluye una verificación reproducible en R en cada apartado.

Contenido temático:

- Tasas de interés activas, pasivas y noción de capitalización.
- Interés simple y régimen de interés compuesto.
- Valoración de bonos e inversiones corporativas.
- Dividendos y tasas de rendimiento de acciones.
- Sistemas de amortización francesa y créditos con cuotas especiales (dobles, escalonadas y con períodos de gracia).
- Planes de ahorro y anualidades (vencidas y anticipadas) con cambios de tasa.
- Depósitos y retiros con distintas periodicidades y esquemas de capitalización.

Exámen final:

Ejercicio 1. Valoración de un bono corporativo

Enunciado

Peruvian Investment S.A. está evaluando invertir en un bono que la empresa Golden Company S.A. emitió hace 8 años. Este bono corporativo se emitió a un plazo de 10 años, con un valor facial de US\$ 1000 y una tasa cupón de 5%; los cupones se pagan cada trimestre. Los inversionistas exigen una tasa de rendimiento al vencimiento de 6,2% capitalizable trimestralmente. **Calcular el precio del bono en la fecha de su emisión.**

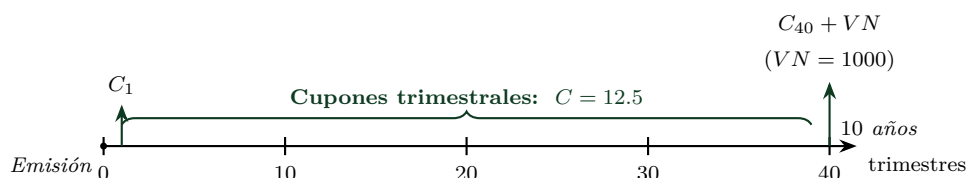
Resolución

Datos del bono

- Valor nominal: $VN = \text{US\$ } 1,000$.
- Plazo: 10 años $\Rightarrow 10 \times 4 = 40$ trimestres.
- Tasa cupón anual: 5% con pagos trimestrales.
- Rendimiento exigido (YTM): 6.2% **capitalizable trimestralmente**.
- Se pide el **precio en la emisión** ($t = 0$), por lo que se valora el flujo completo de 40 trimestres.
- Aunque se menciona que el bono fue emitido hace 8 años, el problema solicita explícitamente el **precio en la fecha de emisión** ($t = 0$).

Un bono es un conjunto de flujos: (i) cupones periódicos y (ii) devolución del valor nominal al vencimiento. El **precio en la emisión** se obtiene trayendo **todos esos flujos a valor presente** usando la **tasa de rendimiento exigida** por el mercado (tasa de descuento).

Línea de tiempo (pagos trimestrales)



Paso 1. Homogeneización de periodicidades (todo a trimestre)

¿Por qué dividimos entre 4? Porque el bono paga cada **trimestre**. Cuando una tasa anual es **nominal** y capitalizable trimestralmente, la tasa aplicable a **cada trimestre**

es su cuarta parte. Esa tasa por período es la que se usa para (i) calcular cupones y (ii) descontar flujos.

Conversión de tasas: $TNA \rightarrow TNTr$ (trimestral) $\equiv TET$ (por trimestre)

- **Tasa cupón (siempre nominal):** $TNA_c = 5\%$. Como los cupones se pagan trimestralmente, se expresa en **tasa nominal trimestral**:

$$TNTr_c = \frac{TNA_c}{4} = \frac{5\%}{4} = 1.25\%.$$

El cupón se *liquida* cada trimestre, por eso el pago trimestral se calcula con $i_c = 1.25\%$ del valor nominal. Numéricamente coincide con una tasa “por trimestre”, por lo que en el flujo puede tratarse como:

$$i_c = 1.25\% \quad (\text{tasa por trimestre}).$$

- **Rendimiento exigido:** $TNA = 6.2\%$ **capitalizable trimestralmente**. Entonces la **tasa nominal trimestral** es:

$$TNTr = \frac{TNA}{4} = \frac{6.2\%}{4} = 1.55\%.$$

Al capitalizar trimestralmente, esta tasa es justamente la que opera en cada trimestre; por eso es **equivalente** a la **tasa efectiva trimestral** para descontar:

$$TNTr \equiv TET = 1.55\% \quad (\text{por trimestre}).$$

a) Tasa cupón trimestral.

$$i_c = \frac{5\%}{4} = \frac{0.05}{4} = 0.0125 = 1.25\% \quad (\text{trimestral}).$$

b) Tasa de rendimiento trimestral.

$$i = \frac{6.2\%}{4} = \frac{0.062}{4} = 0.0155 = 1.55\% \quad (\text{trimestral}).$$

Paso 2. Cálculo del valor del cupón

$$\text{Cupón} = i_c \cdot VN = 0.0125 \cdot 1000 = 12.5.$$

Por tanto, el bono paga **US\$ 12.50** cada trimestre.

Paso 3. Precio del bono en la fecha de emisión ($t = 0$)

Criterio de valoración. En $t = 0$, el precio del bono debe ser igual al **valor presente** de:

- los **40 cupones** de US\$ 12.50 (uno por trimestre), y

- el **valor nominal** de US\$ 1 000 que se paga al final del trimestre 40.

El descuento se realiza con la tasa trimestral exigida $i = 1.55\%$.

El precio en emisión es el valor presente de cupones y del valor nominal:

$$P_0 = 12.5 \left[\frac{(1+i)^{40} - 1}{i(1+i)^{40}} \right] + \frac{1000}{(1+i)^{40}}, \quad i = 0.0155 \quad (1)$$

Calculando:

$$(1+i)^{40} = (1.0155)^{40} \approx 1.85011 \quad \frac{1}{(1+i)^{40}} = \frac{1}{1.85011} \approx 0.540508$$

$$(1+i)^{40} - 1 \approx 1.85011 - 1 = 0.85011$$

En el término de anualidad:

$$\frac{(1+i)^{40} - 1}{i(1+i)^{40}} = \frac{0.85011}{0.0155(1.85011)} = \frac{0.85011}{0.02868} \approx 29.641$$

Por tanto:

$$P_0 \approx 12.5(29.641) + \frac{1000}{1.85011} \approx 370.515 + 540.508 \approx 911.0236$$

Resultado

$$P_0 \approx \text{US\$ } 911.02$$

Si el mercado exige $i = 1.55\%$ por trimestre y el bono solo paga $i_c = 1.25\%$ por trimestre, entonces los cupones son *relativamente bajos* frente a lo que se exige; por eso el precio debe ajustarse a la baja para que el inversionista alcance el rendimiento requerido. En consecuencia, $P_0 < VN$ y el bono se negocia **con descuento**.

Verificación ejecutable en R

```
VN <- 1000
ic <- 0.05/4
i <- 0.062/4
n <- 40

C <- ic*VN
P0 <- C*((1-(1+i)^(-n))/i) + VN*(1+i)^(-n)

round(P0, 2)
```

Ejercicio 2. Valoración de una acción con crecimiento por etapas

Enunciado

El último año la empresa Manufacturas Nacionales S.A. pagó a sus accionistas un dividendo anual de S/ 3 por acción pero, debido a la alta tasa de crecimiento de sus utilidades, se espera que sus dividendos crezcan a una tasa de 12% anual durante los próximos 4 años, luego crezcan a 8% en los siguientes 3 años y después se estabilicen en 6% anual para siempre. Considere que la tasa de rendimiento que exigen los inversionistas es 13.5%. En base a esta información, calcular:

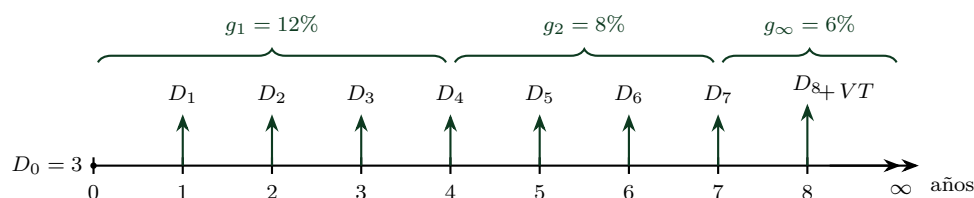
- a) Valor terminal.
- b) Precio de la acción hoy.

Resolución

Datos y criterio de valorización

- Dividendo base pagado el último año: $D_0 = \text{S}/3$ (en $t = 0$).
- Crecimiento esperado por etapas (anual):
 - Etapa 1: $g_1 = 12\%$ para $t = 1, 2, 3, 4$.
 - Etapa 2: $g_2 = 8\%$ para $t = 5, 6, 7$.
 - Etapa estable: $g_\infty = 6\%$ desde $t \geq 8$ (es decir, **después de $t = 7$**).
- Tasa requerida por los accionistas (descuento): $k = 13.5\%$.
- El **precio hoy** es el valor presente de los dividendos explícitos y del flujo estable a *perpetuidad*, resumido en un **valor terminal** (Gordon).

Línea de tiempo (dividendos anuales y etapas de crecimiento)



Procedimiento

- **Primero** proyectamos los dividendos $D_1, \dots, D_8$ aplicando las tasas de crecimiento por etapas.

- **Luego** resumimos el flujo estable (desde que el crecimiento se estabiliza) en un solo monto llamado **valor terminal** VT usando el modelo de Gordon (válido porque $k > g_\infty$).
- **Finalmente** traemos a valor presente todos los dividendos explícitos y el VT para obtener P_0 .

Paso 1. Proyección de dividendos

La regla general es:

$$D_t = D_{t-1}(1 + g).$$

Etapla 1: $g_1 = 12\%$ (años 1 a 4).

$$\begin{aligned} D_1 &= D_0(1.12) = 3(1.12) = 3.36 \\ D_2 &= D_1(1.12) = 3.36(1.12) = 3.7632 \\ D_3 &= D_2(1.12) = 3.7632(1.12) = 4.21478 \\ D_4 &= D_3(1.12) = 4.21478(1.12) = 4.72055 \end{aligned}$$

Etapla 2: $g_2 = 8\%$ (años 5 a 7).

$$\begin{aligned} D_5 &= D_4(1.08) = 4.72055(1.08) = 5.09819 \\ D_6 &= D_5(1.08) = 5.09819(1.08) = 5.50605 \\ D_7 &= D_6(1.08) = 5.50605(1.08) = 5.94653 \end{aligned}$$

Etapla estable: $g_\infty = 6\%$ (desde $t \geq 8$).

$$D_8 = D_7(1.06) = 5.94653(1.06) = 6.30332$$

Año t	Dividendo D_t (S/)	Crecimiento
1	3.36000	12%
2	3.76320	12%
3	4.21478	12%
4	4.72055	12%
5	5.09819	8%
6	5.50605	8%
7	5.94653	8%
8	6.30332	6%

Table 1: Proyección de dividendos por etapas.

Paso 2. Cálculo del valor terminal (VT)

A partir del tramo estable, los dividendos crecen a tasa constante $g_\infty = 6\%$. Como $k = 13.5\% > 6\%$, el valor del flujo a perpetuidad es finito y se puede resumir con Gordon:

$$VT = \frac{D_8}{k - g_\infty}.$$

Sustituyendo:

$$VT = \frac{6.30332}{0.135 - 0.06} = \frac{6.30332}{0.075} \approx 84.04427.$$

VT es un resumen (un solo número) que representa el valor, en el punto donde ya hay crecimiento estable, del flujo futuro de dividendos perpetuos.

Paso 3. Precio de la acción hoy (P_0)

El precio hoy es el **valor presente** de:

- los dividendos explícitos $D_1, \dots, D_8$, y
- el **valor terminal** VT (que resume desde $t = 9$ hasta ∞),

todo descontado a la tasa requerida $k = 13.5\%$.

Por eso:

$$P_0 = \sum_{t=1}^8 \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{VT}{(1+k)^8}, \quad k = 0.135.$$

¿Cómo “sale” numéricamente P_0 ? Se hace exactamente esto:

1. Se calcula cada valor presente $\frac{D_t}{(1+k)^t}$ (columna 3 de la tabla).
2. Se calcula el valor presente del terminal $\frac{VT}{(1+k)^8}$.
3. Se suman todos esos valores presentes:

$$P_0 = \left(\frac{D_1}{(1+k)^1} + \dots + \frac{D_8}{(1+k)^8} \right) + \frac{VT}{(1+k)^8}.$$

Para que se vea “como en el desarrollo”, descontamos cada dividendo por separado y además el valor terminal:

t	D_t (S/)	$\frac{D_t}{(1+k)^t}$
1	3.36000	2.9604
2	3.76320	2.9212
3	4.21478	2.8826
4	4.72055	2.8445
5	5.09819	2.7067
6	5.50605	2.5755
7	5.94653	2.4507
8	6.30332	2.2888
$\frac{VT}{(1+k)^8}$		30.5170
Precio P_0		52.15

Table 2: Descuento de dividendos y valor terminal (redondeado).

Finalmente, el valor **Precio** P_0 es la suma de la columna de valores presentes (dividendos) más el terminal descontado:

$$P_0 \approx (2.9604+2.9212+2.8826+2.8445+2.7067+2.5755+2.4507+2.2888)+30.5170 \approx 52.15.$$

Resultado

- **Valor terminal:** $VT \approx S/ 84.04427$.
- **Precio hoy:** $P_0 \approx S/ 52.15$.

El valor terminal es alto porque resume en un solo monto (en $t = 8$) *todos* los dividendos desde $t = 9$ hasta ∞ bajo crecimiento estable ($g_\infty = 6\%$). Sin embargo, al traerlo al presente se descuenta con una tasa exigida elevada ($k = 13.5\%$), por lo que su contribución hoy es $\frac{VT}{(1+k)^8}$ y no VT completo. Además, como $k > g_\infty$, la perpetuidad tiene valor finito y el precio está dominado por el descuento más que por el crecimiento.

Verificación ejecutable en R

```
# Datos
D0 <- 3
g1 <- 0.12
g2 <- 0.08
g <- 0.06
k <- 0.135

# Dividendos (como en el desarrollo)
D1 <- D0*(1+g1)
D2 <- D1*(1+g1)
D3 <- D2*(1+g1)
D4 <- D3*(1+g1)

D5 <- D4*(1+g2)
D6 <- D5*(1+g2)
D7 <- D6*(1+g2)

D8 <- D7*(1+g)      # primer dividendo en etapa estable (t=8)

# Valor terminal (Gordon) en el punto de estabilización
VT <- D8/(k - g)

# Precio hoy
D <- c(D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7,D8)
t <- 1:8
P0 <- sum(D/(1+k)^t) + VT/(1+k)^8

round(c(VT=VT, P0=P0), 6)
```

Ejercicio 3. Crédito con sistema francés y cuota doble

Enunciado

Golden Bank le otorga un crédito a Jorge en febrero de 2025 bajo las siguientes condiciones:

- Sistema de amortización francés
- Crédito: S/ 25 000
- TEA: 8%
- Seguro de desgravamen mensual: 0.5%
- Plazo: 6 meses
- Cuota doble en julio

Elabore el cuadro de amortización para los siguientes casos:

- **Caso 1:** Datos iniciales del crédito.
- **Caso 2:** Considerando que hay un mes de período de gracia (fuera del plazo del crédito).

Criterios de trabajo y fórmulas

Supuestos operativos

Supuestos operativos (consistentes con la práctica bancaria):

- El desembolso ocurre en **febrero 2025** y las cuotas se pagan **al final de cada mes**.
- El **seguro de desgravamen** se calcula mensualmente como 0.5% del **saldo inicial** de cada período; se cobra junto con la cuota y **no amortiza** capital.
- En el **Caso 2** se considera **gracia total**: no se paga cuota financiera durante el mes de gracia y el interés del período se **capitaliza** (se suma al saldo). El seguro del mes se cobra normalmente.
- Los montos se redondean a **centésimos**; por ello, la última cuota puede ajustarse mínimamente por redondeo.

1) Conversión de TEA a tasa efectiva mensual (TEM).

$$i = (1 + \text{TEA})^{1/12} - 1 = (1 + 0.08)^{1/12} - 1 = 0.00643403 \approx 0.643403\% \text{ mensual.} \quad (2)$$

Definimos el factor de descuento $v = \frac{1}{1+i}$ y la anualidad:

$$a_{\overline{n}|i} = \sum_{t=1}^n v^t = \frac{1-v^n}{i}. \quad (3)$$

2) Mecánica del cuadro (sistema francés). Sea S_{t-1} el saldo al inicio del período t :

$$I_t = S_{t-1} i, \quad (4)$$

$$A_t = \text{Cuota}_t - I_t, \quad (5)$$

$$S_t = S_{t-1} - A_t, \quad (6)$$

$$\text{Seguro}_t = 0.005 S_{t-1}, \quad \text{Pago total}_t = \text{Cuota}_t + \text{Seguro}_t. \quad (7)$$

Caso 1: crédito con cuota doble en julio

En este caso hay **6 cuotas** (marzo a agosto). La cuota es **constante** en una base C , excepto en **julio** donde se paga **el doble** ($2C$).

Cálculo de la cuota base C (con cuota doble programada)

Idea clave (valor presente de pagos no uniformes). En el sistema francés, la *cuota base* C se determina igualando el **valor presente** del cronograma de pagos con el monto prestado ($PV = 25\,000$). Si todas las cuotas fueran iguales a C durante 6 meses, se tendría:

$$PV = C(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6) = C a_{\overline{6}|i}.$$

Sin embargo, aquí **en julio se paga el doble**, es decir, en el período 5 se paga $2C$ en lugar de C . Esto puede verse como:

$$\underbrace{C, C, C, C, C, C}_{6 \text{ cuotas base}} \quad \text{más} \quad \underbrace{C}_{\text{cuota extra en el período 5}}.$$

Por tanto, el valor presente total es el de las 6 cuotas base *más* el valor presente de esa cuota adicional:

$$PV = C a_{\overline{6}|i} + C v^5 = C(a_{\overline{6}|i} + v^5).$$

Aquí v^5 aparece porque la cuota adicional se paga exactamente en el **período 5** (julio), contando marzo como período 1.

Como en julio se paga una cuota adicional equivalente a C , el valor presente cumple:

$$25\,000 = C(a_{\overline{6}|i} + v^5), \quad (8)$$

donde v^5 representa el *extra* de julio (5.ª cuota, considerando marzo como período 1). Por tanto,

$$C = \frac{25\,000}{a_{\overline{6}|i} + v^5} \approx S/ 3,657.32, \quad 2C \approx S/ 7,314.63. \quad (9)$$

La cuota doble en julio acelera la amortización de capital, reduce el saldo más rápido y, en consecuencia, disminuye los intereses y el seguro en los meses posteriores.

Per.	Mes	Saldo inicial	Interés	Amort.	Cuota	Seguro	Pago total	Saldo final
1	Mar-2025	25,000.00	160.85	3,496.47	3,657.32	125.00	3,782.32	21,503.53
2	Abr-2025	21,503.53	138.35	3,518.97	3,657.32	107.52	3,764.84	17,984.56
3	May-2025	17,984.56	115.71	3,541.61	3,657.32	89.92	3,747.24	14,442.95
4	Jun-2025	14,442.95	92.93	3,564.39	3,657.32	72.21	3,729.53	10,878.56
5	Jul-2025	10,878.56	69.99	7,244.64	7,314.63	54.39	7,369.02	3,633.92
6	Ago-2025	3,633.92	23.38	3,633.92	3,657.30	18.17	3,675.47	0.00

Table 3: Cuadro de amortización (Caso 1). Valores en S/.

Caso 2: 1 mes de gracia total (fuera del plazo) y cuota doble en julio

Se incorpora un mes adicional (marzo) como **período de gracia total** fuera del plazo:

- **Marzo 2025:** no se paga cuota financiera y el interés se capitaliza.
- Luego se pagan **6 cuotas** desde **abril a septiembre 2025**.
- La **cuota doble** ocurre en **julio**, que en este cronograma corresponde a la **4.ª cuota**.

Capitalización durante la gracia

$$S_{\text{inicio}} = \text{S/ } 25\,000, \quad I_{\text{gracia}} = 25\,000 i \approx \text{S/ } 160.85 \quad \Rightarrow \quad S_{\text{post-gracia}} = 25\,160.85. \quad (10)$$

Cuota base C_g con nuevo saldo inicial

Con 6 cuotas (abril–septiembre) y cuota doble en julio (4.ª cuota):

$$25,160.85 = C_g (a_{\overline{6}|i} + v^4) \quad \Rightarrow \quad C_g \approx \text{S/ } 3,677.50, \quad 2C_g \approx \text{S/ } 7,354.99. \quad (11)$$

Per.	Mes	Saldo inicial	Interés	Amort.	Cuota	Seguro	Pago total	Saldo final
0	Mar-2025 (gracia)	25,000.00	160.85	0.00	0.00	125.00	125.00	25,160.85
1	Abr-2025	25,160.85	161.89	3,515.61	3,677.50	125.80	3,803.30	21,645.24
2	May-2025	21,645.24	139.27	3,538.23	3,677.50	108.23	3,785.73	18,107.01
3	Jun-2025	18,107.01	116.50	3,561.00	3,677.50	90.54	3,768.04	14,546.01
4	Jul-2025	14,546.01	93.59	7,261.40	7,354.99	72.73	7,427.72	7,284.61
5	Ago-2025	7,284.61	46.87	3,630.63	3,677.50	36.42	3,713.92	3,653.98
6	Sep-2025	3,653.98	23.51	3,653.98	3,677.49	18.27	3,695.76	0.00

Table 4: Cuadro de amortización con 1 mes de gracia total (Caso 2). Valores en S/.

El mes de gracia incrementa el saldo inicial por capitalización del interés; por ello, la cuota base sube y el costo total del financiamiento se eleva.

Resumen comparativo del costo (incluye seguro)

Concepto	Caso 1	Caso 2
Intereses totales (S/)	601.21	742.48
Seguro total (S/)	467.21	576.99
Pagos totales (S/)	26,068.42	26,319.47

Verificación ejecutable en R

```
# Datos generales
PV <- 25000
TEA <- 0.08
i <- (1 + TEA)^(1/12) - 1
s <- 0.005
n <- 6

v <- 1/(1+i)
a <- (1 - v^n)/i

amortiza <- function(PV, C, k_doble, n, i, s){
  saldo <- round(PV, 2)

  out <- data.frame(
    t = integer(0),
    saldo_inicial = numeric(0),
    interes = numeric(0),
    amort = numeric(0),
    cuota = numeric(0),
    seguro = numeric(0),
    pago_total = numeric(0),
    saldo_final = numeric(0)
  )

  for(t in 1:n){
    cuota_t <- round(C * ifelse(t == k_doble, 2, 1), 2)
    interes_t <- round(saldo * i, 2)

    if(t < n){
      amort_t <- round(cuota_t - interes_t, 2)
      saldo_f <- round(saldo - amort_t, 2)
    } else {
      amort_t <- saldo
      cuota_t <- round(amort_t + interes_t, 2)
      saldo_f <- 0
    }

    seguro_t <- round(saldo * s, 2)

    out <- rbind(out, data.frame(
      t = t,
```

```

        saldo_inicial = saldo,
        interes = interes_t,
        amort = amort_t,
        cuota = cuota_t,
        seguro = seguro_t,
        pago_total = round(cuota_t + seguro_t, 2),
        saldo_final = saldo_f
    ))

    saldo <- saldo_f
}

out
}

totales <- function(tab){
  c(
    intereses_totales = round(sum(tab$interes), 2),
    seguro_total      = round(sum(tab$seguro), 2),
    pagos_totales     = round(sum(tab$pago_total), 2)
  )
}

# -----
# CASO 1: Marzo..Agosto (6 cuotas), doble en Julio = periodo 5
# -----
k1 <- 5
C1 <- PV/(a + v^k1)

tabla1 <- amortiza(PV, C1, k1, n=n, i=i, s=s)
tot1 <- totales(tabla1)

# -----
# CASO 2: 1 mes de gracia total (Marzo fuera del plazo)
# - No paga cuota financiera, interés se capitaliza
# - Seguro se paga normal en el mes de gracia
# Luego Abril..Septiembre (6 cuotas), doble en Julio = periodo 4
# -----
interes_gracia <- round(PV*i, 2)
seguro_gracia <- round(PV*s, 2)
PVg <- round(PV + interes_gracia, 2)

k2 <- 4
C2 <- PVg/(a + v^k2)

tabla2_pagos <- amortiza(PVg, C2, k2, n=n, i=i, s=s)

fila_gracia <- data.frame(
  t = 0,
  saldo_inicial = round(PV, 2),
  interes = interes_gracia,

```

```
    amort = 0.00,  
    cuota = 0.00,  
    seguro = seguro_gracia,  
    pago_total = seguro_gracia,  
    saldo_final = PVg  
)  
  
tabla2 <- rbind(fila_gracia, tabla2_pagos)  
tot2 <- totales(tabla2)  
  
# Mostrar resultados  
tabla1  
tot1  
  
tabla2  
tot2
```

Ejercicio 4. Depósitos mensuales anticipados y reinversión a tasa diaria

Enunciado

Mariana hará **24 depósitos** de S/ 340 al **inicio de cada mes** en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés de **12% capitalizable cada mes**. **Un mes después** de que hizo el **último depósito**, transferirá todo el monto a una **cuenta a plazo** que le ofrece una tasa de **14.2% capitalizable cada día**. Calcule el **monto** luego de que **transcurra un año**.

Criterios de trabajo y fórmulas

Nota: Criterios de cálculo y línea de tiempo

Supuestos y cronograma (convención estándar en matemática financiera):

- Los depósitos son **anticipados** (al inicio): se realizan en $t = 0, 1, 2, \dots, 23$ meses.
- La cuenta de ahorros capitaliza **mensualmente**. Con tasa nominal anual 12% capitalizable mensual:

$$i_m = \frac{0.12}{12} = 0.01 \quad (1\% \text{ mensual}).$$

- El monto se traslada **un mes después del último depósito**, es decir, al final del mes 24 ($t = 24$).
- La cuenta a plazo capitaliza **diariamente**. Se utiliza la convención de **año comercial de 360 días** (si se usa 365, la diferencia es prácticamente nula).

Etapas: 1. acumulación en la cuenta de ahorros (12% nominal, capitalización mensual)

Como los depósitos son al inicio de cada mes, se trata de una **anualidad anticipada** (anualidad vencida multiplicada por $(1 + i_m)$). El monto acumulado al final del mes 24 es:

$$F_{24} = R \ddot{s}_{\overline{24}|i_m} = R \left(\frac{(1 + i_m)^{24} - 1}{i_m} \right) (1 + i_m), \quad (12)$$

donde $R = 340$ e $i_m = 0.01$. Sustituyendo:

$$F_{24} = 340 \left(\frac{(1.01)^{24} - 1}{0.01} \right) (1.01) \approx \text{S/ } 9,262.69. \quad (13)$$

Etapa 2: reinversión a tasa diaria (14,2% nominal, capitalización diaria)

La tasa nominal anual 14.2% capitalizable cada día implica una tasa diaria:

$$i_d = \frac{0.142}{360}. \quad (14)$$

Luego, el factor de capitalización para 1 año (360 días) es:

$$(1 + i_d)^{360} = \left(1 + \frac{0.142}{360}\right)^{360}. \quad (15)$$

Por tanto, el monto al cabo de un año en la cuenta a plazo será:

$$F_{\text{final}} = F_{24} \left(1 + \frac{0.142}{360}\right)^{360} \approx 9,262.69 \times 1.15254438 \approx S/ 10,675.66. \quad (16)$$

Resultado

Monto luego de transcurrir un año (después de la transferencia):

$$F_{\text{final}} \approx S/ 10,675.66$$

Este monto se obtiene en **dos etapas**: (i) primero, los 24 depósitos **anticipados** (al inicio de cada mes) se acumulan en la cuenta de ahorros hasta $t = 24$, generando F_{24} ; (ii) luego, ese saldo se **transfiere** y se capitaliza **un año completo** con tasa diaria, por lo que F_{final} es el resultado de multiplicar F_{24} por el factor diario $\left(1 + \frac{0.142}{360}\right)^{360}$. Como hay capitalización diaria, el crecimiento final es *mayor* que si se aplicara interés simple en el año.

Verificación ejecutable en R

```
R <- 340
n <- 24
im <- 0.12/12 # 1% mensual

# Etapa 1: anualidad anticipada acumulada a t=24 meses
F24 <- R * (((1+im)^n - 1)/im) * (1+im)

j <- 0.142
m <- 360
Ffinal <- F24 * (1 + j/m)^m

round(F24, 2)
round(Ffinal, 2)
```

Exámen parcial:

Ejercicio 1. Conceptos básicos de interés

Enunciado

Explique brevemente lo que entiende por los siguientes conceptos:

- **Tasa de interés activa (lending rate, loan rate).**
Es el porcentaje que cobran los bancos por las modalidades de financiamiento conocidas como sobregiros, descuentos y préstamos (a diversos plazos). Se denominan *tasas activas* porque representan recursos a favor de la banca.
- **Tasa de interés pasiva (borrowing rate, deposit rate).**
Es el porcentaje que pagan los intermediarios financieros (bancos) por las distintas modalidades de depósitos que reciben de los agentes superavitarios. Son *tasas pasivas* porque representan un costo de fondeo para la banca.
- **Capitalizar.**
Es el crecimiento del dinero por los intereses generados durante un período de tiempo; es decir, agregar los intereses al capital para que, en el período siguiente, esos intereses también produzcan nuevos intereses.
- **Régimen de interés compuesto.**
La tasa de interés es un porcentaje que se aplica como pago por el uso del dinero durante un tiempo determinado; en otras palabras, es el *precio* del dinero. En el régimen de interés compuesto, los intereses que se van generando se *sumen* al capital inicial y sobre ese nuevo capital se calculan intereses adicionales en los períodos posteriores. El dinero tiene así un efecto multiplicador, porque los intereses producen nuevos intereses.

Ejercicio 2. Descomposición de una inversión con interés simple

Enunciado

Gonzalo recibe una herencia de S/ 750 000 y decide invertirla. Una parte de ese capital la invierte al **12.5%** de interés simple y el resto al **7.6%** de interés simple. El interés total al final de un año es el mismo que el que hubiera obtenido si hubiera invertido todo su dinero al **9.85%** anual de interés simple.

Calcule el capital que invirtió Gonzalo a cada tasa de interés.

Resolución

Datos del problema

- Herencia total: $H = \text{S/ } 750\,000$.
- Parte A: se invierte al 12.5% de interés simple.
- Parte B: se invierte al 7.6% de interés simple.
- Tiempo de la operación: $n = 1$ año.
- Interés equivalente si se invirtiera todo el capital al 9.85% simple.

Recordatorio (interés simple):

$$I = i \cdot P \cdot n.$$

Paso 1. Planteamiento de las partes del capital

Sea

$$\text{Parte A} = x, \quad \text{Parte B} = H - x = 750\,000 - x.$$

La Parte A se coloca al 12.5% simple y la Parte B al 7.6% simple, ambos por un año.

Paso 2. Igualación de intereses

El interés total generado por las dos partes debe ser igual al interés que produciría todo el capital al 9.85% simple por un año.

Interés si se invirtiera todo al 9.85%:

$$I_{\text{equiv}} = 9.85\% \times 750\,000 \times 1 = 0.0985 \cdot 750\,000 = 73\,875.$$

Intereses por cada parte:

$$I_A = 12.5\% \times x \times 1, \quad I_B = 7.6\% \times (750\,000 - x) \times 1.$$

La condición de equivalencia es:

$$I_A + I_B = I_{\text{equiv}},$$

es decir,

$$12.5\% \cdot x \cdot 1 + 7.6\% \cdot (750\,000 - x) \cdot 1 = 9.85\% \cdot 750\,000 \cdot 1$$

Pasando a forma decimal y desarrollando:

$$0.125x + 0.076(750\,000 - x) = 73\,875$$

$$0.125x + 57\,000 - 0.076x = 73\,875$$

$$(0.125 - 0.076)x + 57\,000 = 73\,875$$

$$0.049x = 73\,875 - 57\,000 = 16\,875$$

$$x = \frac{16\,875}{0.049} \approx 344\,387.76$$

Paso 3. Capital en cada tasa

$$\text{Parte A (12.5\%)} \approx \text{S/ } 344\,387.76$$

$$\text{Parte B (7.6\%)} = 750\,000 - 344\,387.76 \approx \text{S/ } 405\,612.24$$

Paso 4. Comprobación rápida

$$I_A \approx 0.125 \times 344\,387.76 \approx 43\,048.47$$

$$I_B \approx 0.076 \times 405\,612.24 \approx 30\,826.53$$

$$I_A + I_B \approx 73\,875.00$$

que coincide con el interés de invertir toda la herencia al 9.85% simple.

Resultado

- Capital invertido al **12.5%** de interés simple:

$$\boxed{\text{S/ } 344\,387.76 \text{ (aprox.)}}$$

- Capital invertido al **7.6%** de interés simple:

$$\boxed{\text{S/ } 405\,612.24 \text{ (aprox.)}}$$

El promedio obtenido del 9.85% está más cercano al 7.6% que al 12.5%, por lo que es coherente que una *mayor parte* de la herencia se haya invertido a la tasa más baja.

Verificación ejecutable en R

```
H <- 750000      # herencia total
i1 <- 0.125      # tasa 12.5% simple
i2 <- 0.076      # tasa 7.6% simple
ieq <- 0.0985    # tasa equivalente 9.85% simple

# x: parte al 12.5%; H - x: parte al 7.6%
# Igualamos el interes total al que generaria todo H a 9.85%
x <- (ieq*H - i2*H)/(i1 - i2)

A <- x
B <- H - x

round(c(parte_12.5 = A, parte_7.6 = B), 2)
```

Ejercicio 3. Ahorro mensual con cambio de tasa de interés

Enunciado

María desea comprar un pequeño departamento valorizado en S/ 350 000 y, para lograrlo, decide depositar en una cuenta de ahorros en una caja municipal una **cantidad fija de dinero en cada mes vencido**, a una tasa de interés del **10.4% capitalizable mensualmente** durante 4 años.

Si la caja municipal disminuye la tasa a **9.2% capitalizable mensualmente** luego de realizado el depósito número 30, ¿cuánto deberá depositar María **el resto del tiempo** para reunir el monto objetivo?

Resolución

Datos y criterios

- Monto objetivo: $F = \text{S/ } 350\,000$ (al final de 4 años).
- Horizonte temporal: 4 años $\Rightarrow 4 \times 12 = 48$ meses.
- Depósitos **mensuales vencidos** (al final de cada mes).
- Tasa inicial: TNA = 10.4% capitalizable mensual

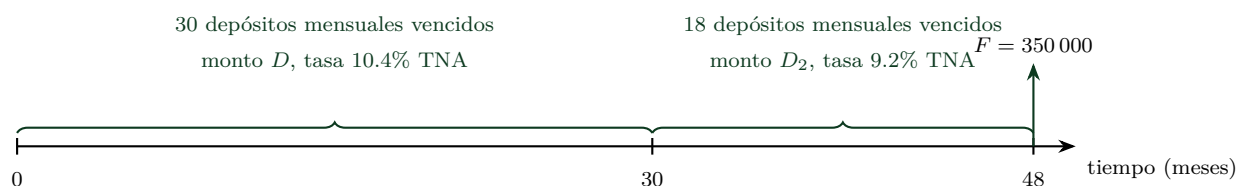
$$i_1 = \frac{10.4\%}{12} \approx 0.0086667 \quad (\approx 0.8667\% \text{ mensual}).$$

- Nueva tasa (desde el depósito 31 en adelante): TNA = 9.2% capitalizable mensual

$$i_2 = \frac{9.2\%}{12} \approx 0.0076667 \quad (\approx 0.7667\% \text{ mensual}).$$

- Depósitos:
 - Depósitos 1 al 30: monto original D con tasa i_1 .
 - Depósitos 31 al 48: nuevo monto D_2 con tasa i_2 .

Línea de tiempo



Paso 1. Plan original (sin cambio de tasa)

Si la tasa se hubiera mantenido en 10.4% durante los 48 meses, el plan de María sería una anualidad vencida con depósitos constantes D :

$$F = D s_{\overline{48}|i_1} = D \left[\frac{(1 + i_1)^{48} - 1}{i_1} \right]$$

Despejando D :

$$D = \frac{F}{s_{\overline{48}|i_1}} = \frac{350\,000}{\frac{(1 + i_1)^{48} - 1}{i_1}}$$

Cálculo numérico:

$$s_{\overline{48}|i_1} = \frac{(1 + 0.0086667)^{48} - 1}{0.0086667} \approx 59.2121$$

$$D \approx \frac{350\,000}{59.2121} \approx \text{S/ } 5\,910.96$$

Este habría sido el depósito mensual si la tasa *no* cambiara.

Paso 2. Monto acumulado después de 30 depósitos

En realidad, solo los primeros 30 depósitos se realizan a la tasa i_1 . El valor acumulado al final del mes 30 (con el monto original D) es:

$$F_{30} = D s_{\overline{30}|i_1} = D \left[\frac{(1 + i_1)^{30} - 1}{i_1} \right]$$

Con los valores encontrados:

$$s_{\overline{30}|i_1} = \frac{(1 + 0.0086667)^{30} - 1}{0.0086667} \approx 34.0936$$

$$F_{30} \approx 5\,910.96 \times 34.0936 \approx \text{S/ } 201\,525.92$$

Desde el mes 30 hasta el mes 48 faltan 18 meses, durante los cuales la tasa será i_2 . Ese saldo continuará capitalizándose a la nueva tasa:

$$\text{Valor de esos S/ } 201\,525.92 \text{ al mes 48 : } F_{30 \rightarrow 48} = F_{30}(1 + i_2)^{18}$$

$$(1 + i_2)^{18} = (1 + 0.0076667)^{18} \approx 1.14737$$

$$F_{30 \rightarrow 48} \approx 201\,525.92 \times 1.14737 \approx \text{S/ } 231\,225.10$$

Paso 3. Nuevo depósito mensual D_2 desde el mes 31

A partir del depósito 31, María podrá ajustar el monto a un nuevo valor D_2 ; estos depósitos se realizan a la tasa mensual i_2 .

Se trata de una anualidad vencida de $n_2 = 18$ pagos a tasa i_2 , cuyo valor futuro en el mes 48 es:

$$F_{D_2} = D_2 s_{\overline{18}|i_2} = D_2 \left[\frac{(1 + i_2)^{18} - 1}{i_2} \right].$$

Condición de meta: la suma de lo ya acumulado ($F_{30 \rightarrow 48}$) más lo generado por los nuevos depósitos debe igualar los S/ 350 000:

$$F_{30 \rightarrow 48} + D_2 s_{\overline{18}|i_2} = 350\,000$$

Despejando D_2 :

$$D_2 = \frac{350\,000 - F_{30 \rightarrow 48}}{s_{\overline{18}|i_2}}$$

Cálculo numérico:

$$s_{\overline{18}|i_2} = \frac{(1 + 0.0076667)^{18} - 1}{0.0076667} \approx 19.2224$$

$$D_2 \approx \frac{350\,000 - 231\,225.10}{19.2224} \approx \frac{118\,774.90}{19.2224} \approx \text{S/ } 6\,178.99$$

Resultado

- Depósito mensual originalmente planificado (si la tasa no hubiera cambiado):

$$D \approx \text{S/ } 5\,910.96$$

- Ante la reducción de la tasa a 9.2% capitalizable mensualmente luego del depósito número 30, el nuevo depósito para los meses 31 al 48 debe ser:

$$D_2 \approx \text{S/ } 6\,178.99$$

El cambio de tasa hace que el dinero crezca más lentamente en la etapa final; por ello, para alcanzar el mismo objetivo de S/ 350 000 en el mes 48, María debe **aumentar** sus depósitos mensuales en la parte final del plan (de alrededor de S/ 5 911 a S/ 6 179).

Verificación ejecutable en R

```
F <- 350000
i1 <- 0.104/12      # tasa mensual 10.4% TNA
i2 <- 0.092/12      # tasa mensual 9.2% TNA

n_total <- 48
n1 <- 30
n2 <- n_total - n1  # 18 meses restantes

# Plan original (sin cambio de tasa) para hallar D
s48 <- ((1 + i1)^n_total - 1)/i1
D <- F / s48

# Acumulado luego de 30 depósitos a i1
s30 <- ((1 + i1)^n1 - 1)/i1
F30 <- D * s30
```

```

# Ese saldo crece 18 meses a la nueva tasa i2
F30_to_48 <- F30 * (1 + i2)^n2

# Factor de acumulación para la nueva anualidad D2 a i2 (18 pagos
)
s18_2 <- ((1 + i2)^n2 - 1)/i2

D2 <- (F - F30_to_48) / s18_2

round(c(D = D, F30 = F30, F30_to_48 = F30_to_48, D2 = D2), 2)

# Comprobación: valor final con los depósitos D (1..30) y D2
(31..48)
VF_final <- F30_to_48 + D2 * s18_2
round(VF_final, 2)

```

Ejercicio 4. Crédito con pagos mensuales escalonados

Enunciado

El Banco Credimás otorga un crédito a Josefina de **S/ 20 000**, el cual empezará a pagar dentro de **3 meses**. Josefina realiza **12 pagos mensuales de X** y posteriormente **6 pagos mensuales de $2X$** . Si el crédito está afecto a una **tasa de interés nominal capitalizable cada bimestre de 9%**, calcule el valor de X .

Resolución

Datos y lectura del problema

- Monto del crédito: $PV = \text{S/ } 20\,000$ (momento del desembolso).
- **Período de gracia implícito:** “empezará a pagar dentro de 3 meses” $\Rightarrow$ primer pago al final del mes 3.
- Pagos:
 - Meses 3 al 14: 12 pagos mensuales de X .
 - Meses 15 al 20: 6 pagos mensuales de $2X$.
- Tasa nominal capitalizable bimestral: $TNA = 9\% \Rightarrow$ tasa efectiva por bimestre:
$$i_{2m} = \frac{0.09}{6} = 0.015 \quad (1.5\% \text{ cada 2 meses}).$$
- Como los pagos son **mensuales**, trabajamos con una tasa efectiva mensual i equivalente:
$$(1+i)^2 = 1+i_{2m} = 1.015 \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt{1.015}-1 \approx 0.0074721 \quad (0.7472\% \text{ mensual}).$$

Línea de tiempo (mensual)



Paso 1. Valor presente de los pagos

Trabajamos con períodos mensuales y tasa efectiva mensual $i \approx 0.0074721$, definiendo

$$v = \frac{1}{1+i} \quad \Rightarrow \quad v \approx 0.9925833.$$

Los pagos de Josefina deben ser equivalentes al crédito recibido:

$$PV = 20\,000 = \underbrace{PV(12 \text{ pagos de } X)}_{P_1} + \underbrace{PV(6 \text{ pagos de } 2X)}_{P_2}.$$

a) **Doce pagos mensuales de X (meses 3 a 14).** Su valor presente es

$$P_1 = X (v^3 + v^4 + \dots + v^{14}).$$

Factorizando v^2 :

$$v^3 + v^4 + \dots + v^{14} = v^2(v + v^2 + \dots + v^{12}) = v^2 a_{\overline{12}|i},$$

donde

$$a_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^n v^k = \frac{1 - v^n}{i}.$$

Entonces

$$P_1 = X v^2 a_{\overline{12}|i}.$$

b) **Seis pagos mensuales de $2X$ (meses 15 a 20).** Análogamente:

$$P_2 = 2X (v^{15} + v^{16} + \dots + v^{20}) = 2X v^{14}(v + v^2 + \dots + v^6) = 2X v^{14} a_{\overline{6}|i}$$

Paso 2. Ecuación de equivalencia y cálculo de X

La condición de equilibrio financiero en $t = 0$ es:

$$20\,000 = X v^2 a_{\overline{12}|i} + 2X v^{14} a_{\overline{6}|i}$$

Despejando X :

$$X = \frac{20\,000}{v^2 a_{\overline{12}|i} + 2v^{14} a_{\overline{6}|i}}$$

Cálculo numérico (paso a paso):

$$a_{\overline{12}|i} = \frac{1 - v^{12}}{i} \approx \frac{1 - 0.91454}{0.0074721} \approx 11.4369$$

$$a_{\overline{6}|i} = \frac{1 - v^6}{i} \approx 5.8462$$

Asimismo,

$$v^2 \approx 0.98522 \quad v^{14} \approx 0.90103$$

Por tanto:

$$v^2 a_{\overline{12}|i} \approx 0.98522 \times 11.4369 \approx 11.2679$$

$$2v^{14} a_{\overline{6}|i} \approx 2 \times 0.90103 \times 5.8462 \approx 10.5351$$

$$v^2 a_{\overline{12}|i} + 2v^{14} a_{\overline{6}|i} \approx 11.2679 + 10.5351 \approx 21.8030$$

Finalmente:

$$X \approx \frac{20\,000}{21.8030} \approx \text{S/ } 917.30$$

Resultado

Para que el valor presente de sus pagos sea equivalente al crédito recibido, Josefina debe realizar:

$$X \approx S / 917.30$$

como pago mensual durante los primeros 12 meses de amortización, y luego **pagos mensuales de $2X$** (aprox. $S / 1\,834.60$) durante los 6 meses finales.

El período de gracia de 3 meses y la capitalización bimestral (equivalente a una tasa mensual de aproximadamente 0.7472%) se reflejan en los factores v^2 y v^{14} que desplazan las anualidades en la línea de tiempo.

Verificación ejecutable en R

```
PV <- 20000

# Tasa nominal 9% capitalizable bimestral
i_2m <- 0.09/6
i     <- sqrt(1 + i_2m) - 1      # tasa efectiva mensual
v     <- 1/(1 + i)

a12 <- (1 - v^12)/i
a6  <- (1 - v^6)/i

den <- v^2 * a12 + 2 * v^14 * a6
X   <- PV / den

X

# Verificación directa: valor presente de los 18 pagos
t <- 1:20
pago <- rep(0, 20)
pago[3:14] <- X
pago[15:20] <- 2*X

PV_check <- sum(pago / (1 + i)^t)
PV_check
```

Ejercicio 5. Plan de ahorro para estudios universitarios (anualidades anticipadas)

Enunciado

Los padres de Martín, que cumplirá 12 años próximamente, desean depositar en una cuenta bancaria, durante **3 años**, cierta cantidad de dinero al **inicio de cada mes**, comenzando el día en que él cumpla los 12 años.

Lo que se acumule en el momento en que Martín cumpla **18 años** será utilizado para realizar una serie de **pagos semestrales de S/ 6 000 anticipados** durante **4 años y medio** para financiar sus estudios superiores. Martín ingresará a la universidad justo cuando cumpla 18 años.

Determine cuánto deberían depositar los padres de Martín en la cuenta a fin de cumplir este objetivo. La tasa de interés durante el período de los depósitos es **13% capitalizable cada mes** y durante el período de los retiros es de **13% capitalizable cada semestre**.

Resolución

Datos y criterio de trabajo

- **Depósitos:** monto fijo D al **inicio de cada mes** durante 3 años $\Rightarrow 3 \times 12 = 36$ depósitos mensuales **anticipados**.
- **Retiros:** pagos semestrales **anticipados** de S/ 6 000 durante 4.5 años $\Rightarrow 4.5 \times 2 = 9$ pagos.
- Tasa en la etapa de depósitos: TNA = 13% capitalizable mensual:

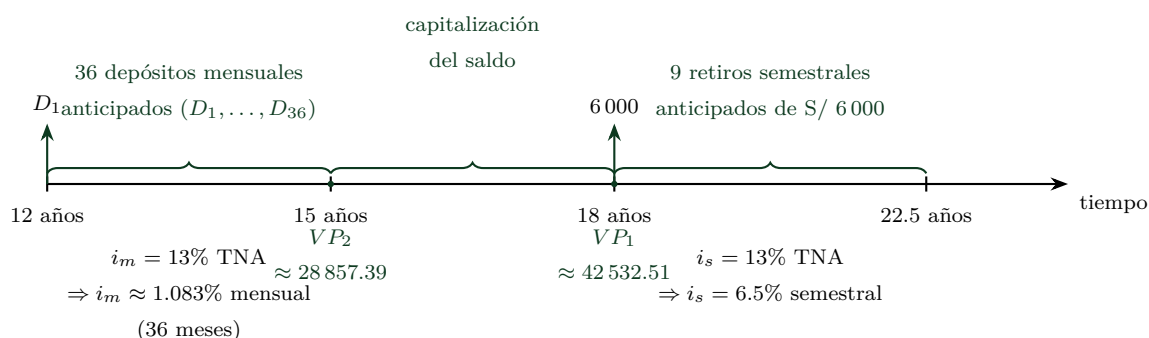
$$i_m = \frac{0.13}{12} \approx 0.0108333 \quad \Rightarrow \quad i_m \approx 1.083\% \text{ mensual.}$$

- Tasa en la etapa de retiros: TNA = 13% capitalizable semestral:

$$i_s = \frac{0.13}{2} = 0.065 \quad \Rightarrow \quad i_s = 6.5\% \text{ semestral.}$$

- Entre el fin de los depósitos (cuando Martín cumple 15 años) y el inicio de los retiros (cuando cumple 18 años) no hay flujos, pero el saldo **permanece invertido**. Supondremos que en ese intervalo sigue rigiendo la **misma tasa mensual** de la etapa de depósitos (13% capitalizable cada mes).

Línea de tiempo



Paso 1. Valor presente de los retiros al inicio de la universidad (VP_1)

Primero trabajamos el tramo de retiros. Desde que Martín cumple 18 años se pagan S/ 6 000 **cada semestre**, en forma **anticipada**, durante $n_s = 9$ semestres.

Conversión de tasa para los retiros

$$\text{TNA} = 13\% \text{ cap. semestral} \Rightarrow i_s = \frac{13\%}{2} = 6.5\% = \text{TES.}$$

Como los pagos son anticipados, el primer pago de S/ 6 000 se realiza exactamente en el punto en que Martín inicia la universidad ($t = 0$ del tramo de retiros). Los **8 pagos restantes** pueden verse como una **anualidad vencida** de 8 términos. ($i_s = 0.065$):

$$\begin{aligned} VP_1 &= 6\,000 + 6\,000 \left[\frac{(1 + 0.065)^8 - 1}{0.065(1 + 0.065)^8} \right] \\ &\approx 6\,000 + 6\,000 \left[\frac{0.6550}{0.10757} \right] \\ &\approx 6\,000 + 6\,000(6.0888) \\ &\approx 6\,000 + 36\,532.51 \\ &\approx \text{S/ } 42\,532.51. \end{aligned}$$

Es decir,

$$VP_1 \approx \text{S/ } 42\,532.51.$$

Paso 2. Traslado de VP_1 tres años hacia atrás: VP_2

Ahora llevamos ese valor (ubicado a los 18 años) al instante en que Martín cumple 15 años (fin del período de ahorro). Entre los 15 y los 18 años hay:

$$n_m = 3 \times 12 = 36 \text{ meses}$$

bajo la tasa mensual i_m .

Interés compuesto entre los 15 y 18 años

La operación es puramente de **descuento compuesto**:

$$VP_2 = \frac{VP_1}{(1 + i_m)^{36}}, \quad i_m = \frac{0.13}{12} \approx 0.0108333.$$

Numéricamente:

$$(1 + i_m)^{36} \approx (1.0108333)^{36} \approx 1.4739, \quad VP_2 \approx \frac{42\,532.51}{1.4739} \approx \text{S/ } 28\,857.39.$$

Este VP_2 es el **saldo que debe existir en la cuenta** al cumplir 15 años para poder financiar exactamente los retiros planeados.

Paso 3. Cálculo del depósito mensual D (anualidad anticipada)

Ahora trabajamos el tramo de ahorro. Los padres depositan D al **inicio de cada mes** durante 36 meses.

- D_1 se deposita el día que Martín cumple 12 años $\Rightarrow$ punto 0.
- D_{36} se deposita al inicio del mes 36 (punto 35 en la línea de tiempo mensual).
- El saldo que igualamos a VP_2 está al final del mes 36, es decir en el **punto 36**.

Primero usamos la **fórmula de anualidad vencida** para hallar el valor acumulado en el punto 35 y luego lo llevamos al punto 36 multiplicando por $(1 + i_m)$. En una sola expresión:

$$VF_{36} = D \left[\frac{(1 + i_m)^{36} - 1}{i_m} \right] (1 + i_m) = D \ddot{s}_{\overline{36}|i_m}.$$

Ese monto debe ser igual a VP_2 (el saldo requerido al cumplir 15 años). En la calculadora, si usamos más decimales para evitar redondeos prematuros, obtenemos aproximadamente:

$$VP_2 \approx 28\,862.0894.$$

$$\begin{aligned} 28\,862.0894 &= D \left[\frac{(1 + i_m)^{36} - 1}{i_m} \right] (1 + i_m) \\ &\approx D \left[\frac{(1 + 0.01083)^{36} - 1}{0.01083} \right] (1 + 0.01083) \\ &\approx D \left[\frac{0.47371}{0.01083} \right] (1.01083) \\ &\approx D(43.74054)(1.01083) \\ &\approx D(44.21425). \end{aligned}$$

Despejando D :

$$D \approx \frac{28\,862.0894}{44.21425} \approx 652.78.$$

Por lo tanto, el depósito mensual necesario es:

$$D \approx S / 652.78.$$

Resultado

Para que el fondo disponible al cumplir Martín 18 años alcance a financiar los 9 pagos semestrales anticipados de $S / 6\,000$, sus padres deben depositar:

$$D \approx S / 652.78$$

al **inicio de cada mes** durante los 3 años comprendidos entre los 12 y los 15 años de Martín.

Obsérvese que:

- La serie de retiros es más espaciada (semestral) y con una tasa efectiva por período mayor (6.5%), por lo que su valor presente VP_1 es relativamente alto.
- Como el dinero sigue capitalizándose desde los 15 hasta los 18 años, el fondo necesario a los 15 años (VP_2) resulta menor que VP_1 , aun cuando genera exactamente los mismos pagos.
- El hecho de que los depósitos sean *anticipados* (al inicio de cada mes) permite acumular más interés y reduce el monto D necesario frente a una anualidad vencida.

Verificación ejecutable en R

```
# Datos
i_m <- 0.13/12      # tasa efectiva mensual (TEM)
i_s <- 0.13/2       # tasa efectiva semestral (TES)
R   <- 6000         # pago semestral
n_s <- 9            # 4.5 años -> 9 semestres
n_m <- 36           # 3 años -> 36 meses

# Paso 1: valor presente de los retiros al cumplir 18 años (VP1)
VP1 <- R * ((1 - (1+i_s)^(-n_s))/i_s) * (1+i_s)

# Paso 2: traer VP1 tres años antes (cuando termina el ahorro) -> VP2
VP2 <- VP1 / (1+i_m)^n_m

# Paso 3: deposito mensual D (anualidad anticipada)
sdd_36 <- ((1+i_m)^n_m - 1)/i_m * (1+i_m)
D      <- VP2 / sdd_36
```

```
round(c(VP1 = VP1, VP2 = VP2, D = D), 2)

# Comprobación: fondo al cumplir 18 años con estos depósitos
F15 <- D * sdd_36          # monto al cumplir 15 años
F18 <- F15 * (1+i_m)^n_m   # monto al cumplir 18 años

round(c(F18 = F18, VP1 = VP1), 2) # deben coincidir (pequeñas
  diferencias por redondeo)
```